CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Materiał dodatkowy**
Zagadnienie:	**Zbiór zadań z matematyki**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom egzaminu:	**Rozszerzony**
Adresaci dokumentu:	Nauczyciele matematyki Uczniowie szkół ponadpodstawowych
Data publikacji dokumentu:	14 października 2022 r.

Zespół redakcyjny:
Sebastian Felski (CKE)
Mariusz Mroczek (CKE)
Hubert Rauch (CKE)
Ewa Ludwikowska (OKE Gdańsk)
dr Michał Krych (UW)

Recenzenci:
dr hab. Jan Jakóbowski (UWM)
Marian Pacholak (OKE Warszawa)
dr Wioletta Kozak (CKE)

Materiał został opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99
oke@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 99
oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. 86 473 71 20
sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 634 91 33
sekretariat@lodz.oke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
pl. Europejski 3, 00-844 Warszawa
tel. 22 457 03 35
info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
sekretariat@oke.wroc.pl

Spis treści

Wprowadzenie

Matematyka jest nauką, która stanowi istotne wsparcie dla innych dziedzin, zwłaszcza dla nauk przyrodniczych i informatycznych. Nauczanie matematyki w szkole opiera się na czterech fundamentach: nauce rozumowania matematycznego, analizie i interpretacji informacji, kształceniu sprawności rachunkowej oraz przekazywaniu wiedzy o własnościach obiektów matematycznych.

Sprawność rachunkowa	Sprawność rachunkowa jest niezwykle ważnym elementem nauczania matematyki nawet obecnie, kiedy wiele rachunków wykonuje się za pomocą sprzętu elektronicznego. Ważnym celem ćwiczenia sprawności rachunkowej jest kształtowanie wyobrażenia o wielkościach liczb, a w konsekwencji doskonalenie umiejętności precyzyjnego szacowania wyników. Takie wyobrażenie ułatwia codzienne życie, na przykład planowanie budżetu domowego. Na wyższym poziomie, przy działaniach na wyrażeniach algebraicznych, sprawność rachunkowa pozwala doskonalić umiejętność operowania obiektami matematycznymi.
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Istotnym elementem edukacji matematycznej jest umiejętność analizy i interpretacji tekstu matematycznego przedstawionego w różnej formie, np. relacji, wykresów, tabel, diagramów oraz interpretacji uzyskanego wyniku, sensowności otrzymanego rozwiązania.
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wiedza o własnościach obiektów matematycznych pozwala na swobodne operowanie nimi i stosowanie obiektów matematycznych do opisu bądź modelowania zjawisk obserwowanych w rzeczywistości. Własności matematyczne modeli przekładają się często na konkretne własności obiektów rzeczywistych.
Rozumowanie matematyczne	Rozumowanie matematyczne to umiejętność poszukiwania rozwiązania danego zagadnienia. Dobrze kształcona rozwija zdolność myślenia konstruktywnego, premiuje postępowanie nieschematyczne i twórcze. Ponadto rozumowanie matematyczne narzuca pewien rygor ścisłości: dowód matematyczny musi być poprawny. Dobre opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego ułatwia w życiu codziennym odróżnianie prawdy od fałszu.

Powyższe umiejętności zostały ujęte w podstawie programowej jako cele kształcenia – wymagania ogólne.

Zadania sprawdzające wymagania z podstawy programowej – poziom rozszerzony

Zadanie 1. (0–3)

Oblicz wartość wyrażenia

$$\log_8 3^{3\log_3 2 - \log_{27} 8 - \log_9 4}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–4)

Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy równej 7. Jedna z tych liczb jest wielokrotnością liczby 7.

Wykaż, że iloczyn $\boldsymbol{a \cdot b \cdot c}$ jest podzielny przez $\mathbf{294}$.

Zadanie 3. (0–2)

Niech a, b będą liczbami całkowitymi, dla których zachodzi równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$.

Wykaż, że jeśli 5 jest dzielnikiem liczby $a - b$, to 25 również jest dzielnikiem liczby $a - b$.

Zadanie 4. (0–2)

Rozpatrzmy liczby naturalne większe od 1000, w których zapisie występuje tylko cyfra 1:

$$a = \underbrace{11\ldots111}_{n}$$

Wykaż, że jeśli liczba a zapisana za pomocą n jedynek jest liczbą pierwszą, to liczba n również jest liczbą pierwszą.

Zadanie 5. (0–4)

Suma liczb całkowitych x i y jest podzielna przez 3.

Wykaż, że suma sześcianów liczb x i y jest podzielna przez 9.

Zadanie 6. (0–3) PP

W rozwinięciu wyrażenia $(a+b)^n$ dla pewnego $n \in N$ suma współczynników przy wyrazach $a^{n-2}b^2$ oraz $a^{n-1}b$ jest równa 66.

Oblicz liczbę n. Zapisz obliczenia.

PP Zadanie sprawdza wymaganie II.R3) podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało w pełnym zakresie na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

Zadanie 7. (0–3)

Niech a, b, c będą takimi liczbami całkowitymi, że $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = 0$.

Wykaż, że $\boldsymbol{a = b = c = 0}$.

Zadanie 8. (0–3) PP

Wykaż, że liczba $a = \left(\sqrt{5}+2\right)^{2022} + \left(\sqrt{5}-2\right)^{2022}$ **jest wymierna.**

PP Zadanie sprawdza wymaganie II.R3) podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało w pełnym zakresie na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

Zadanie 9. (0–3)

Rozwiąż nierówność $2x^2 + x|2x - 1| \leq 3$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–5)

Rozwiąż nierówność

$$x+4+\frac{8}{x-4} \geq \frac{-2x-8}{x^2-16}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$2x^2 - (2m + 7)x + m^2 - 3m + 21 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek $x_1 = 2x_2$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)<\frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

Zadanie 13. (0–3)

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 24 \\ x^2 - 10x + y^2 - 8y + 40 = 0 \end{cases}$$

Oblicz liczby x i y. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0–3) PP

Dane są funkcje k oraz p. Funkcja k jest określona wzorem $k(x) = 5 - x^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Funkcja p jest określona wzorem $p(x) = \sqrt{1-x}$ dla każdej liczby rzeczywistej x nie większej od 1. Funkcje f oraz g są określone następująco:

$$f = k \circ p \text{ oraz } g = p \circ k.$$

Wyznacz wzory i dziedziny funkcji f oraz g.

PP Zadanie sprawdza wymaganie V.R2) podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

Zadanie 15. (0–4)

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{|x^2-9|}{3-x}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0–5)

Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Ciąg $(a_1 \cdot a_2 \, , \; a_2 \cdot a_3 \, , \; a_3 \cdot a_1)$ jest geometryczny i ma wyrazy różne od zera.

Oblicz iloraz tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0–2)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są dwie proste l_1 oraz l_2. Kąt między tymi prostymi ma miarę $45°$. Współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_1 jest równy $\frac{2}{3}$.

Oblicz współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_2. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0–5)

Rozwiąż równanie

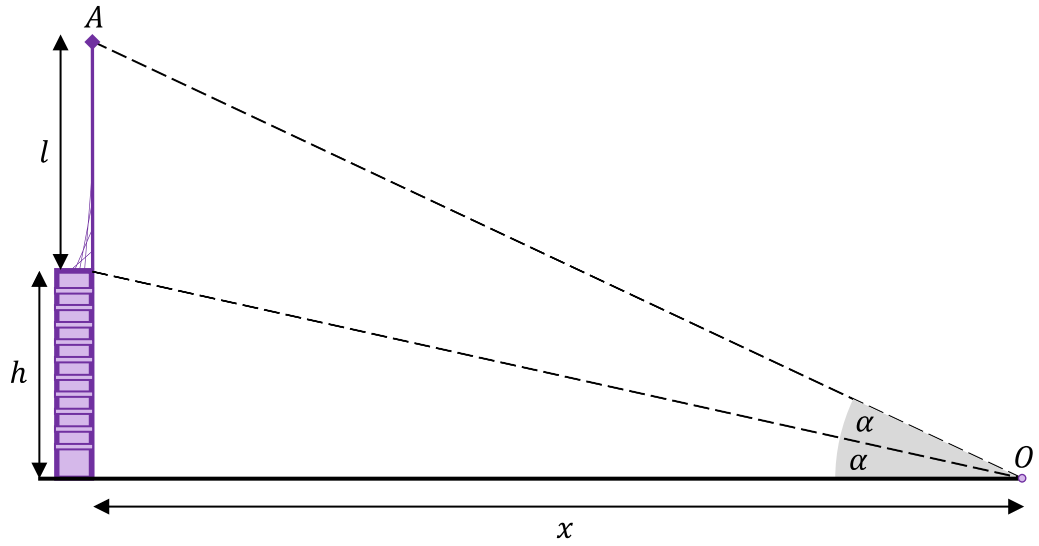
$$\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$**.**

Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0–3)

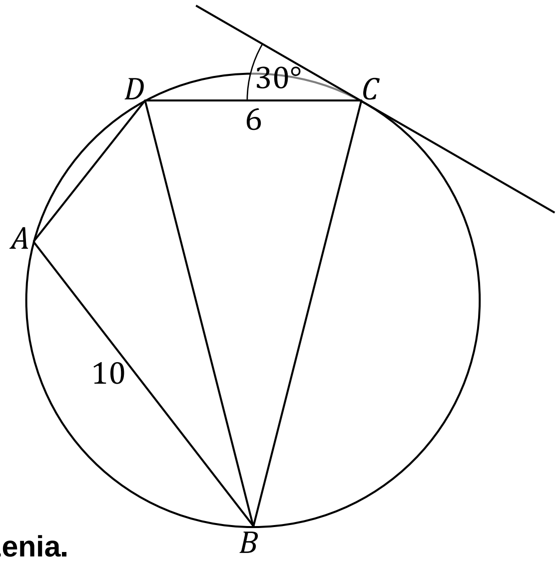
Na szczycie wieży o wysokości h umieszczono pionowo antenę radiową stacji nadawczej o długości l $(l > h)$. Punkt O leży na płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez podnóże wieży, a punkt A znajduje się na końcu anteny. Koniec anteny A widać z punktu O pod dwukrotnie większym kątem niż wieżę (zobacz rysunek).



Oblicz odległość x podnóża wieży od punktu A. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0–6)

W pewien okrąg wpisano czworokąt $ABCD$ taki, że $|AB| = 10$, $|CD| = 6$ oraz $|BC| = |BD|$. Styczna do tego okręgu w punkcie C tworzy z bokiem CD kąt α o mierze $30°$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

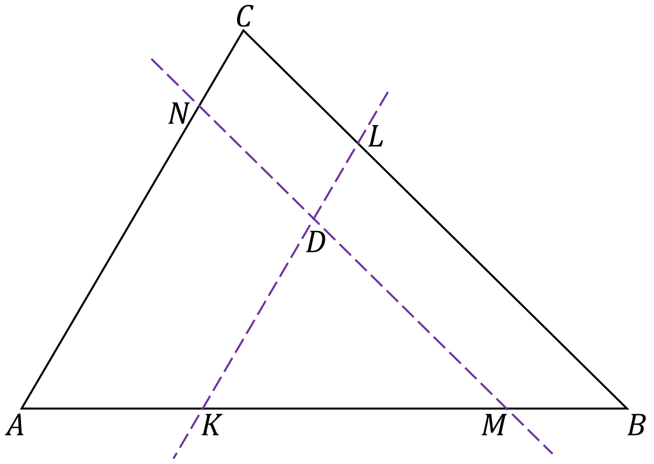
Zadanie 21. (0–4)

W trapezie $ABCD$ przekątna BD jest dwusieczną kąta CBA i przecina przekątną AC w punkcie K, takim, że $|CK|:|KA| = 1 : 3$. Pole tego trapezu jest równe $100(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\sin \sphericalangle BAD = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $|AD| = 10$ oraz kąt BAD jest ostry.

Oblicz długości pozostałych boków trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0–6)

Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku AC przecina bok AB w punkcie K, a bok BC w punkcie L. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie M, a bok AC w punkcie N (zobacz rysunek). Stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta KBL jest równy $5:7$, a stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta AMN jest równy $5:8$. Pole czworokąta $DLCN$ jest równe 15.



Oblicz pole trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0–3) PP

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x}}{5+x^2} - 3^{-x-1}$$

dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej x.

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe dodatnie mniejsze od 3.

PP Zadanie sprawdza wymaganie XIII.R2) podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

Zadanie 24. (0–3) PP

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \sqrt{1 + 4x}$ dla $x \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = 2$. Zapisz obliczenia.

PP Zadanie sprawdza wymaganie XIII.R4) podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało w pełnym zakresie na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

Zadanie 25. (0–4)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \in [-1, 3]$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

Zadanie 26. (0–3)

Trójkąt ABC, w którym $|AC| = |BC|$, jest wpisany w okrąg o promieniu R. Środek tego okręgu leży wewnątrz trójkąta. Niech x oznacza odległość środka okręgu od podstawy AB.

Wykaż, że pole trójkąta ABC jako funkcja zmiennej x jest określone wzorem $P(x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$. Określ dziedzinę tej funkcji.

Zadanie 27. (0–6)

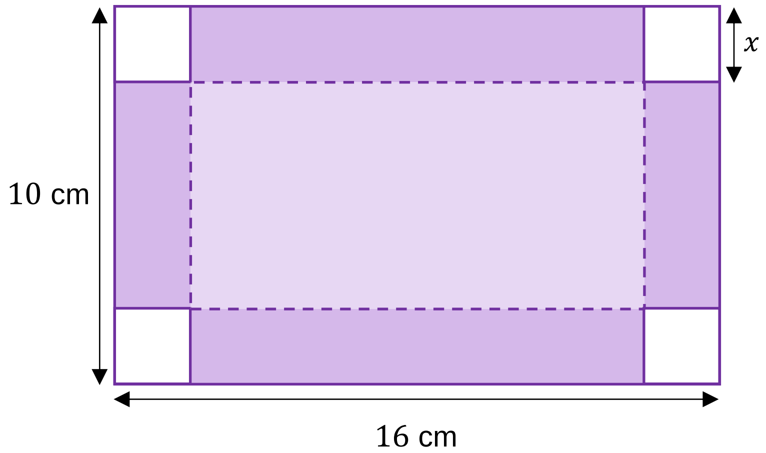
Dany jest okrąg o promieniu R. Rozważamy wszystkie trójkąty spełniające warunki:

- są wpisane w ten okrąg
- mają obwody równe $3R$
- mają jeden z boków dwukrotnie dłuższy od drugiego.

Znajdź trójkąt o możliwie największym polu przy zadanych warunkach. Oblicz jego pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 28. (0–6)

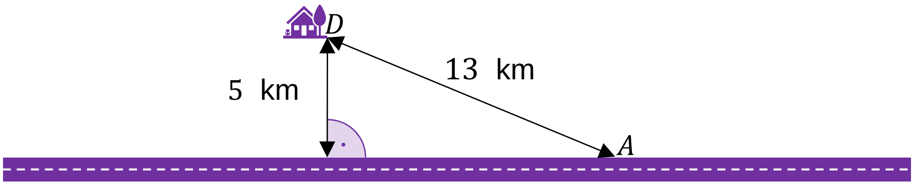
Grażyna planuje zrobienie pudełka (bez wieczka) w kształcie prostopadłościanu. W tym celu zamierza wykorzystać prostokątny kawałek tektury o wymiarach $10\text{ cm} \times 16\text{ cm}$, odcinając z każdego rogu kwadrat o boku x cm (zobacz rysunek).



Oblicz wartość x, dla której objętość otrzymanego pudełka będzie największa. Oblicz tę największą objętość pudełka. Zapisz obliczenia.

Zadanie 29. (0–6) PP

Dom D stoi w odległości 5 km od prostoliniowego odcinka drogi. W chwili początkowej Janusz znajduje się na tej drodze w punkcie A oddalonym od domu D o 13 km (zobacz rysunek). Janusz może iść drogą z maksymalną prędkością 5 km/h, zaś poza nią może poruszać się z maksymalną prędkością 3 km/h.



Oblicz najkrótszy czas potrzebny Januszowi na dojście do domu D.

Zapisz obliczenia.

PP Zadanie sprawdza wymaganie XIII.R4) podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało w pełnym zakresie na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

Zadanie 30. (0–4)

Ciężarówka ma do pokonania trasę długości S km, poruszając się po autostradzie ze stałą prędkością v km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 40 km/h, maksymalna – 80 km/h. Wiemy, że litr paliwa kosztuje 8 złotych, a kierowca otrzymuje 42 złote za godzinę swej pracy. Zużycie paliwa w ciągu jednej godziny jazdy autostradą w zależności od prędkości v wyrażone w litrach można opisać funkcją $f(v) = 7 + \frac{v^2}{400}$.

Oblicz, przy jakiej prędkości koszt przejazdu będzie najmniejszy. Zapisz obliczenia.

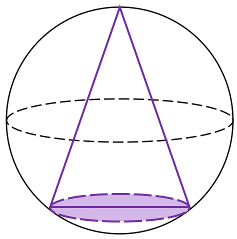
Wskazówka: przyjmij, że koszt przejazdu jest sumą kosztu paliwa oraz wynagrodzenia kierowcy.

Zadanie 31. (0–6) PP

Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki zawierające środek kuli i wpisane w tę kulę, to znaczy takie, w których:

- wierzchołek leży na powierzchni kuli
- okrąg, będący krawędzią podstawy stożka, leży na powierzchni kuli

(zobacz rysunek).



Oblicz promień podstawy tego stożka, który ma największą objętość. Oblicz objętość tego stożka. Zapisz obliczenia.

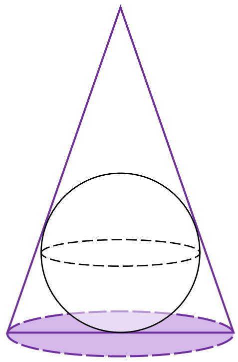
PP Zadanie sprawdza wymagania XIII.R4) oraz X.6) podstawy programowej z matematyki, które nie będą obowiązywać w pełnym zakresie na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

Zadanie 32. PP

Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki opisane na tej kuli, to znaczy takie, których:

- podstawa ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą
- każda tworząca ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą

(zobacz rysunek).



Zadanie 32.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V stożka o wysokości h wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}$$

PP Zadanie 32. sprawdza wymaganie X.6) podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywać w pełnym zakresie na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

Zadanie 32.2. (0–5)

Oblicz wysokość tego stożka, który ma najmniejszą objętość. Oblicz objętość tego stożka. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z informacji, że objętość stożka o wysokości h *wyraża się wzorem*

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}$$

Zasady oceniania

Zadanie 1. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: I.R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie wartości wyrażenia: $\frac{1}{3}$.

2 pkt – zastosowanie wzorów na logarytm potęgi i zapisanie wyrażenia w postaci: $\log_8 3^{\log_3 2}$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia o zamianie podstaw logarytmu i zapisanie wyrażenia w postaci: $\log_8 3^{3\log_3 2-\frac{1}{3}\log_3 8-\frac{1}{2}\log_3 4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy wzór na zamianę podstaw logarytmu i przekształcamy wykładnik potęgi

$$3\log_3 2-\log_{27}8-\log_9 4=3\log_3 2-\log_{3^3}8-\log_{3^2}4=3\log_3 2-\frac{1}{3}\log_3 8-\frac{1}{2}\log_3 4$$

Stosujemy wzór na logarytm potęgi

$$3\log_3 2-\frac{1}{3}\log_3 8-\frac{1}{2}\log_3 4=3\log_3 2-\frac{1}{3}\log_3 2^3-\frac{1}{2}\log_3 2^2=$$

$$=3\log_3 2-\frac{1}{3}\cdot 3\log_3 2-\frac{1}{2}\cdot 2\log_3 2=\log_3 2$$

Stosując wzór $a^{\log_a b}=b$, obliczamy wartość potęgi

$$\log_8 3^{3\log_3 2-\frac{1}{3}\log_3 8-\frac{1}{2}\log_3 4}=\log_8 3^{\log_3 2}=\log_8 2=\frac{1}{3}$$

Zadanie 2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż […] dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych. VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – zapisanie iloczynu liczb a, b, c w postaci: $abc = 7 \cdot 49 \cdot (k-1)k(k+1),\ k \in Z$

ORAZ

uzasadnienie, że liczba $(k-1)k(k+1)$ jest całkowita i podzielna przez 6.

3 pkt – zapisanie iloczynu liczb a, b, c w postaci: $abc = 7 \cdot 49 \cdot (k-1)k(k+1),\ k \in Z$.

2 pkt – zapisanie iloczynu liczb a, b, c w postaci: $abc = (7k-7)7k(7k+7),\ k \in Z$.

1 pkt – zapisanie jednej z liczb w postaci wielokrotności liczby 7, np.: $b = 7k,\ k \in Z$,

ALBO

zapisanie zależności między wyrazami ciągu arytmetycznego,

np. $a = b - 7$, $c = b + 7$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Jeśli jedna z liczb a, b, c jest wielokrotnością liczby 7, a różnica ciągu również jest równa 7, wynika stąd, że każda z tych liczb musi być całkowitą wielokrotnością liczby 7.

Przyjmijmy, że

$$b = 7k,\quad k \in Z$$

Ponieważ liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy równej 7, więc liczby a i c można wyznaczyć w zależności od liczby b:

$$a = b - 7,\ \ c = b + 7,$$

Otrzymujemy zatem

$$abc\ =\ (7k-7)7k(7k+7)\ =\ 7 \cdot 49(k-1)k(k+1),\ k \in Z$$

Uzasadnimy, że liczba $(k-1)k(k+1)$ jest całkowita i podzielna przez 6.

Ponieważ k jest liczbą całkowitą, to $(k-1)$ oraz $(k+1)$ też są liczbami całkowitymi, zatem ich iloczyn również jest liczbą całkowitą.

Wyrażenie $(k-1)k(k+1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, więc jest podzielne:

- przez 2, ponieważ wśród trzech kolejnych liczb całkowitych co najmniej jedna jest liczbą parzystą,
- przez 3, ponieważ wśród trzech kolejnych liczb całkowitych jedna jest liczbą podzielną przez 3.

Wynika stąd, że iloczyn $(k-1)k(k+1)$ jest podzielny przez 6.

Jednym z czynników w rozkładzie iloczynu abc jest liczba 49, a iloczyn $(k-1)k(k+1)$ jest podzielny przez 6, zatem iloczyn abc jest podzielny przez $49 \cdot 6 = 294$.

To należało wykazać.

Zadanie 3. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zasady oceniania

2 pkt – uzasadnienie, że liczba 25 jest dzielnikiem liczby $a-b$.

1 pkt – zapisanie liczb a^2 lub b^2 w postaci iloczynów: $a^2=(a-b)(3a+3b+1)$ lub $b^2=(a-b)(2a+2b+1)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczając b^2 z warunku zadania, mamy

$$b^2=2a^2+a-2b^2-b=2(a^2-b^2)+(a-b)=2(a-b)(a+b)+(a-b)$$

Wyciągając przed nawias wyrażenie $(a-b)$, otrzymujemy równość

$$b^2=(a-b)(2a+2b+1)$$

Zakładając, że 5 jest dzielnikiem różnicy $(a-b)$, możemy stwierdzić, że jest ona również dzielnikiem liczby b^2. Ponieważ 5 jest liczbą pierwszą, musi być również dzielnikiem liczby b.

Skoro 5 dzieli liczby $(a-b)$ oraz b, musi również dzielić ich sumę: $(a-b)+b=a$. Wtedy z kolei liczba $(2a+2b+1)$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1 i nie może być wielokrotnością liczby 5.

Jeśli zatem liczba 5 jest dzielnikiem liczby b, to $5^2=25$ musi być dzielnikiem liczby b^2. Ponieważ 5 nie może być dzielnikiem $(2a+2b+1)$, to oznacza, że 25 musi być dzielnikiem czynnika $(a-b)$ występującego w rozkładzie liczby b^2.

Wykazaliśmy zatem, że jeśli 5 jest dzielnikiem liczby $a-b$, to 25 również jest dzielnikiem liczby $a-b$.

Uwaga

Podobne rozumowanie można przeprowadzić, przedstawiając liczbę a^2 w postaci

$$a^2 = 3a^2 + a - 3b^2 - b = (a - b)(3a + 3b + 1)$$

Zadanie 4. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zasady oceniania

2 pkt – uzasadnienie, że jeśli liczba a jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.

1 pkt – zapisanie założenia, że n nie jest liczbą pierwszą oraz $n = k \cdot l$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpatrujemy liczby postaci

$$a = \underbrace{11111\ldots111}_{n}$$

Załóżmy, że n nie jest liczbą pierwszą. Istnieją wtedy takie liczby naturalne k, l, że $n = k \cdot l$.

Niech b oznacza liczbę całkowitą zapisaną za pomocą k jedynek. Oznacza to, że $b = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10^2 + 10 + 1$.

W zapisie liczby a widzimy l grup, każda złożona jest z k jedynek.

$$a = \underbrace{\underbrace{11\ldots1}_{k}\,\underbrace{11\ldots1}_{k}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{k}}_{l}$$

$$a = \underbrace{bb\ldots b}_{l}$$

Zatem

$$a = b + 10^k \cdot b + 10^{2k} \cdot b + \ldots + 10^{k(l-1)} \cdot b = b\left(1 + 10^k + 10^{2k} + \ldots + 10^{k(l-1)}\right)$$

Oznacza to, że liczba a ma co najmniej dwa naturalne dzielniki większe od 1, zatem jest złożona. Dochodzimy więc do sprzeczności, co pokazuje, że niemożliwa jest sytuacja, gdy liczba pierwsza a posiada w swoim zapisie n jedynek i n nie jest liczbą pierwszą.

Komentarz

Zauważmy, że z tego, że n jest liczbą pierwszą, wcale nie musi wynikać, że a będzie pierwsza.
Liczba $11\,111 = 41 \cdot 271$ została zapisana za pomocą pięciu jedynek, a jest, jak widać, liczbą złożoną. Podobnie $1\,111\,111 = 239 \cdot 4\,649$.

Zadanie 5. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: II.R3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $(a+b)^n$, $(a-b)^n$.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie założenia i zapisanie sumy sześcianów liczb x i y w postaci
$x^3 + y^3 = 3k \cdot [(3k)^2 - 3xy] = 9k(3k^2 - xy)$
ORAZ
uzasadnienie, że liczba $k(3k^2 - xy)$ jest całkowita.

3 pkt – zastosowanie założenia i zapisanie sumy sześcianów liczb x i y w postaci
$x^3 + y^3 = 3k \cdot [(3k)^2 - 3xy] = 9k(3k^2 - xy)$.

2 pkt – zapisanie sumy sześcianów liczb x i y w postaci
$x^3 + y^3 = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy]$.

1 pkt – zapisanie sumy liczb x i y w postaci $x + y = 3k$, $k \in Z$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy sumę liczb x i y w postaci

$$x + y = 3k, \qquad k \in Z$$

Stosujemy wzór na sumę sześcianów liczb x i y, kolejno przekształcając wyrażenie

$$x^3 + y^3 = (x+y)[x^2 - xy + y^2] = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy]$$

Z założenia mamy $x + y = 3k$, zatem możemy przekształcić dalej

$$(x+y)[(x+y)^2 - 3xy] = 3k \cdot [(3k)^2 - 3xy] = 9k \cdot (3k^2 - xy), \ k \in Z$$

Uzasadnimy, że liczba $k(3k^2 - xy)$ jest całkowita.

Ponieważ k jest liczbą całkowitą, to $3k^2$ też jest liczbą całkowitą.
Ponieważ x i y są liczbami całkowitymi, więc iloczyn xy również jest liczbą całkowitą.
Różnica liczby całkowitej $3k^2$ i liczby całkowitej xy jest liczbą całkowitą.
Iloczyn liczby całkowitej $(3k^2 - xy)$ i liczby całkowitej k jest liczbą całkowitą.

Jednym z czynników w rozkładzie sumy sześcianów liczb całkowitych x i y jest liczba 9, a pozostałe są liczbami całkowitymi.
Wynika stąd, że suma sześcianów $x^3 + y^3$ jest podzielna przez 9.
To należało wykazać.

Zadanie 6. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: II.R3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $(a+b)^n$, $(a-b)^n$.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie równania: $n = 11$.

2 pkt – zastosowanie wzorów na dwumian Newtona i zapisania równania w postaci:

$$\frac{(n-1)n}{2} + n = 66$$

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą n: $\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 66$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy wzór na rozwinięcie dwumianu Newtona:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \boldsymbol{\binom{n}{1} a^{n-1} b^1} + \boldsymbol{\binom{n}{2} a^{n-2} b^2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Zapisując sumę współczynników przy odpowiednich potęgach, otrzymujemy równanie:

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 66$$

Stosujemy wzór na symbol Newtona $\binom{n}{k}$, skąd po przekształceniach otrzymujemy kolejno:

$$\frac{(n-1)n}{2} + n = 66$$

$$n^2 + n - 132 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe i sprawdzamy, które z rozwiązań jest liczbą naturalną:

$n = -12 \notin N$ oraz $n = 11 \in N$

Szukanym wykładnikiem jest $n = 11$.

Zadanie 7. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2, (a+b)^3$, $(a-b)^3, a^3-b^3$, a^n-b^n.

Zasady oceniania

3 pkt – uzasadnienie, że $a=b=c=0$.
2 pkt – rozpatrzenie dwóch spośród trzech przypadków: $b=0$, $c=0$, $bc\neq 0$.
1 pkt – rozpatrzenie jednego z trzech przypadków: $b=0$, $c=0$, $bc\neq 0$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z równości $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{6}=0$ wynika, że

$$2a^2=3b^2+6bc\sqrt{2}+6c^2$$

Rozważmy możliwe współczynniki przy liczbie $\sqrt{2}$.

Jeśli $bc\neq 0$, to $\sqrt{2}=\frac{2a^2-3b^2-6c^2}{6bc}$ byłaby liczbą wymierną, dochodzimy więc do sprzeczności. Wynika z tego, że $b=0$ lub $c=0$.

Jeśli $b=0$, to $a\sqrt{2}+c\sqrt{6}=0$, czyli, dzieląc obie strony równania przez $\sqrt{2}$, mamy $a+c\sqrt{3}=0$. Jeśli założymy, że $c\neq 0$, to $\sqrt{3}=-\frac{a}{c}$, ale to przeczy niewymierności liczby $\sqrt{3}$, zatem c musi być równe 0, ale wtedy również $a=0$, czyli $a=b=c=0$.

Jeśli z kolei $c=0$, to $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=0$, a mnożąc obie strony tej równości przez $\sqrt{2}$, dochodzimy do zależności $2a+b\sqrt{6}=0$. Stąd wynika, że $b=0$, bo inaczej $\sqrt{6}$ byłby równy $\left(-\frac{2a}{b}\right)$, co przeczy niewymierności liczby $\sqrt{6}$. Wynika stąd, że $b=0$, a zatem $a=0$ i dalej $c=0$.

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: II.R3) korzysta ze wzorów na: a^3+b^3, $(a+b)^n, (a-b)^n$.

Zasady oceniania

3 pkt – zapisanie informacji, że suma $\left(\sqrt{5}+2\right)^{2022}+\left(\sqrt{5}-2\right)^{2022}$ zawiera tylko parzyste potęgi liczby $\sqrt{5}$.

2 pkt – zapisanie informacji, że w wyrażeniach: $\left(\sqrt{5}+2\right)^{2022}$ i $\left(\sqrt{5}-2\right)^{2022}$ odpowiednie współczynniki przy nieparzystych potęgach liczby $\sqrt{5}$ w obu równościach są liczbami przeciwnymi.

1 pkt – zastosowanie wzoru $(a+b)^n$ do jednego z wyrażeń: $\left(\sqrt{5}+2\right)^{2022}$ lub $\left(\sqrt{5}-2\right)^{2022}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z dwumianu Newtona:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{(n-2)}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0 b^n$$

Dla $a=\sqrt{5}$ oraz $b=2$ mamy:

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^{2022}=\binom{2022}{0}\cdot\sqrt{5}^{2022}\cdot 2^0+\binom{2022}{1}\cdot\sqrt{5}^{2021}\cdot 2^1+$$
$$+\binom{2022}{2}\cdot\sqrt{5}^{2020}\cdot 2^2+\ldots+\binom{2022}{2021}\cdot\sqrt{5}^{1}\cdot 2^{2021}+\binom{2022}{2022}\cdot\sqrt{5}^{0}\cdot 2^{2022}$$

Dla $a=\sqrt{5}$ oraz $b=-2$ mamy:

$$\left(\sqrt{5}-2\right)^{2022}=\binom{2022}{0}\cdot\sqrt{5}^{2022}\cdot 2^0-\binom{2022}{1}\cdot\sqrt{5}^{2021}\cdot 2^1+$$
$$+\binom{2022}{2}\cdot\sqrt{5}^{2020}\cdot 2^2-\ldots-\binom{2022}{2021}\cdot\sqrt{5}^{1}\cdot 2^{2021}+\binom{2022}{2022}\cdot\sqrt{5}^{0}\cdot 2^{2022}$$

Możemy zaobserwować, że odpowiednie współczynniki przy nieparzystych potęgach liczby $\sqrt{5}$ w obu równościach są liczbami przeciwnymi i przy ich dodaniu zredukują się.

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^{2022}+\left(\sqrt{5}-2\right)^{2022}=2\cdot\binom{2022}{0}\cdot\sqrt{5}^{2022}\cdot 2^0+2\cdot\binom{2022}{2}\cdot\sqrt{5}^{2020}\cdot 2^2+$$
$$+2\cdot\binom{2022}{4}\cdot\sqrt{5}^{2018}\cdot 2^4+\ldots+\binom{2022}{2020}\cdot\sqrt{5}^{2}\cdot 2^{2020}+2\cdot\binom{2022}{2022}\cdot\sqrt{5}^{0}\cdot 2^{2022}$$

Powyższa suma zawiera tylko parzyste potęgi liczby $\sqrt{5}$, zatem jest liczbą wymierną:

$$\binom{2022}{0}\cdot 5^{1011}\cdot 2^1+\binom{2022}{2}\cdot 5^{1010}\cdot 2^3+\binom{2022}{4}\cdot 5^{1009}\cdot 2^5+$$
$$+\binom{2022}{6}\cdot 5^{1008}\cdot 2^7+\ldots+\binom{2022}{2020}\cdot 5^1\cdot 2^{2021}+\binom{2022}{2022}\cdot 5^0\cdot 2^{2023}$$

Zadanie 9. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2\|x+3\|+3\|x-1\|=13$, $\|x+2\|+2\|x-3\|<13$.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania nierówności i otrzymanie prawidłowego wyniku: $x \in (-\infty, 1]$.

2 pkt – w każdym z przedziałów $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ oraz $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ zapisanie poprawnej postaci nierówności $2x^2 + x|2x-1| \le 3$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej i w jednym z tych przedziałów rozwiązanie nierówności.

1 pkt – zapisanie przedziałów $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ oraz $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ i co najmniej w jednym z nich zapisanie poprawnej postaci nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, zapisujemy wyrażenie $|2x-1|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, \text{gdy } x \ge \dfrac{1}{2} \\ -2x+1, \text{gdy } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Aby znaleźć zbiór rozwiązań nierówności $2x^2 + x|2x-1| \le 3$, rozwiążemy tę nierówność w każdym z przedziałów $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ oraz $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, a następnie wyznaczymy sumę zbiorów rozwiązań w poszczególnych przedziałach.

Dla $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ nierówność przyjmuje postać:

$$2x^2 - x(2x-1) \le 3$$

Rozwiązując nierówność, otrzymujemy: $x \le 3$.
Uwzględniając rozpatrywany przedział $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, zbiorem rozwiązań tej nierówności jest $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Dla $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ nierówność przyjmuje postać:

$$2x^2 + x(2x-1) \le 3$$

Stąd mamy

$$2x^2 + 2x^2 - x \leq 3$$

$$4x^2 - x - 3 \leq 0$$

Rozwiązując nierówność, otrzymujemy:

$$\Delta = 49, \qquad \sqrt{\Delta} = 7, \qquad x_1 = -\frac{3}{4}, \qquad x_2 = 1 \text{ i } x \in \left[-\frac{3}{4}, 1\right]$$

Uwzględniając rozpatrywany przedział $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, zbiorem rozwiązań tej nierówności jest $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ostatecznie zbiorem rozwiązań nierówności $2x^2 + x|2x - 1| \leq 3$ jest $x \in (-\infty, 1]$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: III.R2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż $\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$.

Zasady oceniania

5 pkt – rozwiązanie nierówności wymiernej i zapisanie zbioru jej rozwiązań:

$\left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right] \cup (4, +\infty)$.

4 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności: $R \backslash \{-4, 4\}$ oraz zapisanie nierówności w postaci:

$$\frac{(x+4)(x^2-6)}{(x-4)(x+4)} \geq 0$$

ALBO

rozwiązanie nierówności wielomianowej $(x+4)^2(x^2-6)(x-4) \geq 0$ i zapisanie zbioru jej rozwiązań: $\{-4\} \cup \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right] \cup [4, +\infty)$.

3 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności: $R \backslash \{-4, 4\}$ oraz zapisanie nierówności w postaci:

$$\frac{(x^2-8)(x+4) + 2x + 8}{(x-4)(x+4)} \geq 0$$

2 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności: $R \backslash \{-4, 4\}$

ORAZ

zapisanie nierówności w postaci:

$$\frac{(x+4)(x-4)+8}{x-4} \geq \frac{-2x-8}{(x-4)(x+4)}$$

1 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności: $R \backslash \{-4, 4\}$

ALBO

zapisanie nierówności w postaci:

$$\frac{(x+4)(x-4)+8}{x-4} \geq \frac{-2x-8}{(x-4)(x+4)}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę nierówności. Każdy z mianowników musi być różny od zera.

$$x+4+\frac{8}{x-4}\geq\frac{-2x-8}{x^2-16}$$

$x-4\neq 0$ i $x^2-16\neq 0$

Zatem nierówność ma sens liczbowy dla $x\in R\backslash\{-4,4\}$

Przekształcamy kolejno nierówność:

$$\frac{(x+4)(x-4)+8}{x-4}\geq-\frac{2x+8}{(x-4)(x+4)}$$

$$\frac{(x^2-16)+8}{x-4}+\frac{2x+8}{(x-4)(x+4)}\geq 0$$

$$\frac{x^2-8}{x-4}+\frac{2x+8}{(x-4)(x+4)}\geq 0$$

$$\frac{(x^2-8)(x+4)+2(x+4)}{(x-4)(x+4)}\geq 0$$

$$\frac{(x+4)(x^2-6)}{(x-4)(x+4)}\geq 0$$

Ponieważ znak wyrażenia wymiernego $\frac{(x+4)(x^2-6)}{(x-4)(x+4)}$ jest taki sam, jak wyrażenia będącego iloczynem licznika i mianownika tego ułamka algebraicznego, zatem

$$(x+4)(x^2-6)\cdot(x-4)(x+4)\geq 0$$

$$(x+4)^2(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x-4)\geq 0$$

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności wielomianowej jest
$\{-4\}\cup\left[-\sqrt{6},\sqrt{6}\right]\cup[4,+\infty)$.

Uwzględniając dziedzinę nierówności wymiernej, wyznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań nierówności wymiernej.

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności wymiernej jest zbiór $\left[-\sqrt{6},\sqrt{6}\right]\cup(4,+\infty)$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie wartości parametru m: 4 oraz 7.

3 pkt – zapisanie równania prowadzącego do obliczenia wartości parametru m:

$$2\left(\frac{2m+7}{6}\right)^2=\frac{m^2-3m+21}{2} \text{ lub } 4\left(\frac{1}{3}m+\frac{7}{6}\right)^2=m^2-3m+21.$$

2 pkt – zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia wartości parametru m:

$$\begin{cases}3x_2=\frac{2m+7}{2}\\ 2x_2^2=\frac{m^2-3m+21}{2}\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}6x_2=2m+7\\ 4x_2^2=m^2-3m+21\end{cases}$$

1 pkt – zapisanie wzorów Viète'a: $x_1+x_2=\frac{2m+7}{2}$ oraz $x_1\cdot x_2=\frac{m^2-3m+21}{2}$

ALBO

zapisanie równania w postaci iloczynowej: $2(x-2x_2)(x-x_2)=0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Współczynniki zadanego równania kwadratowego to: $a=2$, $b=-(2m+7)$, $c=m^2-3m+21$.

Korzystamy ze wzorów Viète'a i z założenia $x_1=2x_2$:

$$x_1+x_2=2x_2+x_2=3x_2=\frac{-b}{a}=\frac{2m+7}{2}$$

$$x_1\cdot x_2=2x_2\cdot x_2=2x_2^2=\frac{c}{a}=\frac{m^2-3m+21}{2}$$

Podstawiamy wartość $x_2=\frac{2m+7}{6}$ do drugiego równania:

$$2\left(\frac{2m+7}{6}\right)^2=\frac{m^2-3m+21}{2}$$

$$2\cdot\frac{4m^2+28m+49}{36}=\frac{m^2-3m+21}{2}$$

$$4m^2+28m+49=9m^2-27m+189$$

$$5m^2 - 55m + 140 = 0$$

$$m^2 - 11m + 28 = 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego: $\Delta = 9$.
Pierwiastkami tego równania są liczby 4 oraz 7.
Dla $m = 4$ zadane równanie ma postać $2x^2 - 15x + 25 = 0$, a jego pierwiastkami są liczby 5 i $\frac{5}{2}$.
Dla $m = 7$ zadane równanie ma postać $2x^2 - 21x + 49 = 0$, a jego pierwiastkami są liczby 7 i $\frac{7}{2}$.

Sposób II

Ponieważ współczynnik $a = 2$, postać iloczynowa zadanego równania będzie miała postać

$$2(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Po podstawieniu $x_1 = 2x_2$ otrzymujemy

$$2(x - 2x_2)(x - x_2) = 0$$

Po wymnożeniu nawiasów mamy

$$2x^2 - 6x_2x + 4x_2^2 = 0$$

Porównując otrzymane współczynniki ze współczynnikami zadanego równania, możemy stwierdzić, że

$$\begin{cases} 6x_2 = 2m + 7 \\ 4x_2^2 = m^2 - 3m + 21 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $x_2 = \frac{1}{3}m + \frac{7}{6}$ i wstawiamy do drugiego:

$$4\left(\frac{1}{3}m + \frac{7}{6}\right)^2 = m^2 - 3m + 21$$

$$\frac{4}{9}m^2 + \frac{28}{9}m + \frac{49}{9} = m^2 - 3m + 21$$

$$4m^2 + 28m + 49 = 9m^2 - 27m + 189$$

$$5m^2 - 55m + 140 = 0$$

$$m^2 - 11m + 28 = 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego: $\Delta = 9$.
Pierwiastkami tego równania są liczby 4 oraz 7.

Dla $m = 4$ zadane równanie ma postać $2x^2 - 15x + 25 = 0$, a jego pierwiastkami są liczby 5 i $\frac{5}{2}$.

Dla $m = 7$ zadane równanie ma postać $2x^2 - 21x + 49 = 0$, a jego pierwiastkami są liczby 7 i $\frac{7}{2}$.

Zadanie 12. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie rozumowania prowadzącego do uzasadnienia dwóch nierówności.
1 pkt – przeprowadzenie rozumowania prowadzącego do uzasadnienia jednej z nierówności.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Musimy wykazać prawdziwość dwóch nierówności. Zaczynając od lewej strony, mamy

$$2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=\frac{2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}=$$

$$=\frac{2[(n+2)-(n+1)]}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{2}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}$$

Zastępując w mianowniku wyrażenie $\sqrt{n+2}$ przez $\sqrt{n+1}$, zwiększymy cały ułamek, zatem

$$\frac{2}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}<\frac{2}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Postępując w analogiczny sposób z prawą stroną nierówności, będziemy mieli

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{2[(n+1)-n]}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Jeśli zwiększymy mianownik, zastępując $\sqrt{n}$ wyrażeniem $\sqrt{n+1}$, wartość całego ułamka będzie mniejsza:

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}=\frac{2}{2\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Zadanie 13. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: IV.R) rozwiązuje układy równań kwadratowych postaci $\begin{cases}x^2+y^2+ax+by=c\\x^2+y^2+dx+ey=f\end{cases}$

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

ALBO

zapisanie współrzędnych punktów przecięcia okręgów: $(4,4)$ i $(5,3)$ oraz sprawdzenie rachunkiem poprawności wyniku.

2 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą otrzymanego z układu równań, np. $x_1 = 4$ oraz $x_2 = 5$

ALBO

odczytanie współrzędnych środków i promieni dwóch okręgów:
$S_1(1,0)$ i $r_1 = 5$ oraz $S_2(5,4)$ i $r_2 = 1$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą otrzymanego z układu równań, np.
$x^2 - 9x + 20 = 0$

ALBO

odczytanie współrzędnych środka i promienia jednego z okręgów:
$S_1(1,0)$ i $r_1 = 5$ albo $S_2(5,4)$ i $r_2 = 1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 24 \\ x^2 - 10x + y^2 - 8y + 40 = 0 \end{cases}$$

Odejmując stronami równania, otrzymujemy

$$8x + 8y = 64$$

Wyznaczamy y:

$$y = 8 - x$$

Podstawiamy y do pierwszego równania:

$$x^2 - 2x + (8 - x)^2 = 24$$

Następnie przekształcamy do postaci trójmianu kwadratowego:

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są liczby: $x_1 = 4$ oraz $x_2 = 5$. Odpowiadają im wartości $y_1 = 4$ oraz $y_2 = 3$

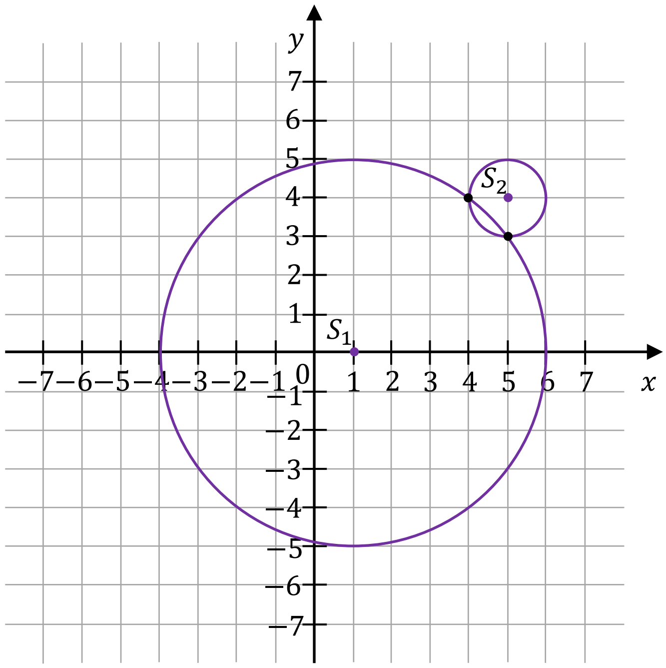
Rozwiązania układu to pary liczb: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Sposób II

Przekształcamy równanie okręgu
$x^2 - 2x + y^2 = 24$ do postaci kanonicznej $(x-1)^2 + y^2 = 25$ i odczytujemy współrzędne środka $S_1(1,0)$ oraz długość promienia $r_1 = 5$.
Przekształcamy równanie okręgu
$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 40 = 0$ do postaci kanonicznej

$(x-5)^2+(y-4)^2=1$ i odczytujemy współrzędne środka $S_2(5,4)$ oraz długość promienia $r_2=1$.

Okręgi przecinają się w punktach $(4,4)$ i $(5,3)$.



Sprawdzamy rachunkowo poprawność rozwiązań:

Dla $x=4$, $y=4$:

$$\begin{cases}4^2-2\cdot4+4^2=24\\4^2-10\cdot4+4^2-8\cdot4+40=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}16-8+16=24\\16-40+16-32+40=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}24=24\\0=0\end{cases}$$

Dla $x=5$, $y=3$:

$$\begin{cases}5^2-2\cdot5+3^2=24\\5^2-10\cdot5+3^2-8\cdot3+40=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}25-10+9=24\\25-50+9-24+40=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}24=24\\0=0\end{cases}$$

Zadanie 14. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: V.R2) posługuje się złożeniami funkcji.

Zasady oceniania

3 pkt – wyznaczenie wzorów funkcji f oraz funkcji g i ich dziedzin:

$f(x)=x+4$, $D_f=(-\infty,1]$ oraz $g(x)=\sqrt{x^2-4}$, $D_g=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

2 pkt – wyznaczenie wzorów funkcji f oraz funkcji g: $f(x)=x+4$ oraz $g(x)=\sqrt{x^2-4}$

ALBO

wyznaczenie wzoru funkcji f oraz jej dziedziny: $f(x)=x+4$ oraz $D_f=(-\infty,1]$,

ALBO

wyznaczenie wzoru funkcji g oraz jej dziedziny: $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ oraz $D_g=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

1 pkt – wyznaczenie wzoru funkcji f lub funkcji g: $f(x)=x+4$ lub $g(x)=\sqrt{x^2-4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy wzór funkcji f i jej dziedzinę:

$$f = k \circ p\,(x) = k[p(x)] = f\left(\sqrt{1-x}\right) = 5 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 5 - 1 + x = x + 4$$

Ponieważ $D_k = R$ oraz $D_p = (-\infty, 1]$, więc $D_f = (-\infty, 1]$.

Wyznaczamy wzór funkcji g i jej dziedzinę:

$$g(x) = p \circ k\,(x) = p[k(x)] = g(5 - x^2) = \sqrt{1 - 5 + x^2} = \sqrt{x^2 - 4}$$

Wyrażenie $\sqrt{x^2 - 4}$ ma sens liczbowy, gdy

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$(x+2)(x-2) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

Zatem $D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Zadanie 15. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 4. Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.	Uczeń: V.R1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = \|f(x)\|$.

Zasady oceniania

4 pkt – zapisanie zbioru wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań: $m \in [-6, 0)$.

3 pkt – narysowanie wykresu funkcji f, do którego należą punkty o współrzędnych $(-6, 3)$, $(-3, 0)$, $(0, 3)$ i zaznaczenie, że punkty o współrzędnych $(3, -6)$ i $(3, 6)$ nie należą do wykresu funkcji f.

2 pkt – zapisanie wzoru funkcji z uwzględnieniem znaku $x^2 - 9$ i założenia $x \neq 3$:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{gdy } x \in (-\infty, -3] \cup (3, +\infty) \\ x + 3, \text{gdy } x \in (-3, 3) \end{cases}$$

1 pkt – zapisanie dziedziny funkcji f: $R \backslash \{3\}$ i rozważenie dwóch przypadków znaku $x^2 - 9$: $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, gdy $x^2 - 9 \geq 0$ oraz $x \in (-3, 3)$, gdy $x^2 - 9 < 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyrażenie $\frac{|x^2-9|}{3-x}$ ma sens liczbowy, gdy $x \neq 3$, zatem dziedziną funkcji $f(x) = \frac{|x^2-9|}{3-x}$ jest zbiór $R \setminus \{3\}$.

Rozpatrujemy dwa przypadki znaku $x^2 - 9$:

$x^2 - 9 \geq 0$ oraz $x^2 - 9 < 0$

Rozwiązaniem nierówności $x^2 - 9 \geq 0$ jest zbiór $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, a nierówności $x^2 - 9 < 0$ zbiór $(-3, 3)$.

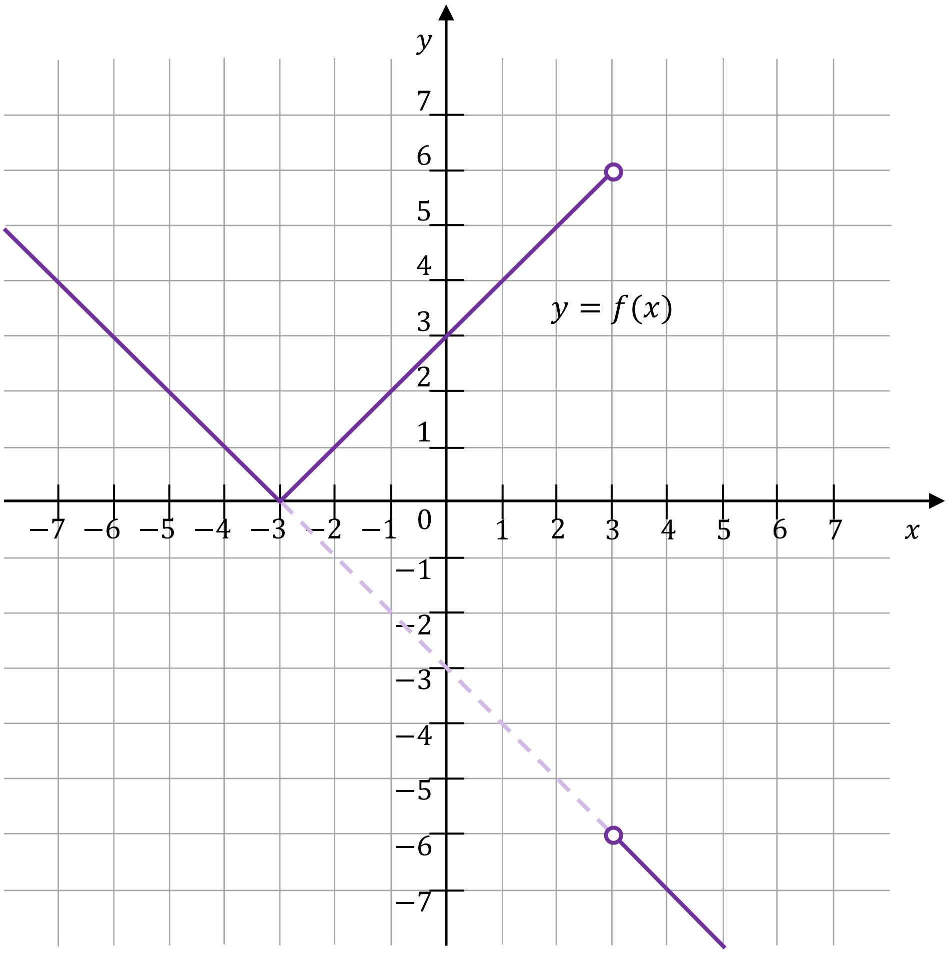
Uwzględniamy dziedzinę funkcji f i zapisujemy wzór funkcji dla dwóch przypadków:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{ gdy } x \in (-\infty, -3] \cup (3, +\infty) \\ x + 3, \text{ gdy } x \in (-3, 3) \end{cases}$$

Aby jednoznacznie wyznaczyć prostą, wystarczą dwa punkty. Do wykresu funkcji f należą punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.

Do wykresu funkcji $f(x) = -x - 3$, gdy $x \in (-\infty, -3] \cup (3, +\infty)$, należą punkty: przecięcia z osią Ox układu współrzędnych $f(-3) = 0$ oraz np. $f(-6) = 3$.

Do wykresu funkcji $f(x) = x + 3$, gdy $x \in (-3, 3)$, należą punkty: przecięcia z osią Oy układu współrzędnych $f(0) = 3$ oraz np. $f(2) = 5$.



Równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m \in [-6, 0)$.

Zadanie 16. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Uczeń: VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

5 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu ciągu geometrycznego i poprawny wynik: $q = -2$.

4 pkt – odrzucenie $r = 0$ i wyznaczenie jednego z wyrazów a_2 lub a_3 w zależności od wyrazu a_1: $a_2 = -\frac{1}{2}a_1$, $a_3 = -2a_1$.

3 pkt – wyznaczenie dwóch rozwiązań równania $3a_1r + 2r^2 = 0$: $r = 0$ lub $r = -\frac{3}{2}a_1$.

2 pkt – zapisanie równania w postaci: $a_1^2 = (a_1 + r)(a_1 + 2r)$.

1 pkt – zastosowanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie zależności: $(a_2a_3)^2 = a_1a_2 \cdot a_3a_1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że liczby a_1a_2, a_2a_3 oraz a_3a_1 tworzą ciąg geometryczny. Stosujemy własność ciągu geometrycznego.

$$(a_2a_3)^2 = a_1a_2 \cdot a_3a_1$$

$$a_2^2a_3^2 = a_1^2a_2a_3$$

Ponieważ ten ciąg geometryczny ma wyrazy różne od zera, zatem ciąg arytmetyczny również ma wyrazy różne od zera, czyli $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$. Dzieląc obie strony równania przez wyrażenie $a_2a_3 \neq 0$, otrzymujemy

$$a_1^2 = a_2a_3$$

Stosujemy wzór na n– ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_2 = a_1 + r \text{ oraz } a_3 = a_1 + 2r,$$

a następnie podstawiamy:

$$a_1^2 = (a_1 + r)(a_1 + 2r)$$

Po opuszczeniu nawiasów mamy

$$3a_1r + 2r^2 = 0$$

$$r(3a_1 + 2r) = 0$$

Stąd otrzymujemy

$$r = 0 \text{ lub } r = -\frac{3}{2}a_1$$

Ponieważ ciąg arytmetyczny jest rosnący, więc $r = 0$ nie spełnia warunków zadania.
Zatem jedyną możliwością jest $r = -\frac{3}{2}a_1$

Wyznaczamy wyraz a_2, albo a_3 w zależności od wyrazu a_1:

$$a_2 = a_1 + \left(-\frac{3}{2}a_1\right) = -\frac{1}{2}a_1$$

albo

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}a_1\right) = -2a_1$$

Następnie, w zależności od tego, który z kolejnych wyrazów ciągu wyznaczyliśmy, obliczamy iloraz q ciągu geometrycznego:

$$q = \frac{a_3\, a_1}{a_2 a_3} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{-\frac{1}{2}a_1} = -2$$

albo

$$q = \frac{a_2\, a_3}{a_1 a_2} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{-2a_1}{a_1} = -2$$

Zadanie 17. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: VII.R5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Zasady oceniania

2 pkt – rozwiązanie równania i zapisanie dwóch możliwych wartości współczynnika kierunkowego prostej: $a_2 = 5$ lub $a_2 = -\frac{1}{5}$.

1 pkt – obliczenie jednego z rozwiązań: $a_2 = 5$ albo $a_2 = -\frac{1}{5}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Proste $l_1 \colon y = a_1 x + b_1$ oraz $l_2 \colon y = a_2 x + b_2$ przecinają się pod kątem $45°$. Ich współczynniki kierunkowe są równe tangensom kątów nachylenia do osi Ox.

Niech $a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ oraz $a_2 = \operatorname{tg} \beta$.

Rozważmy dwa przypadki: $\beta = \alpha + 45°$ oraz $\beta = \alpha - 45°$.

W pierwszym przypadku mamy

$$a_2 = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha + 45°) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 45°} = \frac{\frac{2}{3} + 1}{1 - \frac{2}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = 5$$

W drugim przypadku analogicznie

$$a_2 = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha - 45°) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 45°}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 45°} = \frac{\frac{2}{3} - 1}{1 + \frac{2}{3} \cdot 1} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}$$

Sposób II

Zgodnie z warunkami zadania prosta l_1 ma równanie kierunkowe postaci $y = \frac{2}{3}x + b_1$, gdzie $b_1 \in \mathbb{R}$. Prosta l o równaniu $y = -\frac{3}{2}x + b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$, jest prostopadła do l_1. Ponadto prosta l_2 tworzy z prostą l_1 kąt $45°$ tylko wtedy, gdy jest dwusieczną kąta prostego wyznaczonego przez proste l_1 i l. Zatem punkt (x_0, y_0) leży na prostej l_2 tylko wtedy, gdy jest równo oddalony od prostych l oraz l_1. Stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{\left|\frac{2}{3}x_0 - y_0 + b_1\right|}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-\frac{3}{2}x_0 - y_0 + b\right|}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2}}$$

Przekształcając to równanie równoważnie, otrzymujemy kolejno:

$$\frac{3 \cdot \left|\frac{2}{3}x_0 - y_0 + b_1\right|}{\sqrt{13}} = \frac{2 \cdot \left|-\frac{3}{2}x_0 - y_0 + b\right|}{\sqrt{13}}$$

$$|2x_0 - 3y_0 + 3b_1| = |-3x_0 - 2y_0 + 2b|$$

$$2x_0 - 3y_0 + 3b_1 = -3x_0 - 2y_0 + 2b \quad \text{lub} \quad 2x_0 - 3y_0 + 3b_1 = -(-3x_0 - 2y_0 + 2b)$$

$$y_0 = 5x_0 + 3b_1 - 2b \quad \text{lub} \quad y_0 = -\frac{1}{5}x_0 + \frac{3}{5}b_1 + \frac{2}{5}b$$

Zatem prosta l_2 ma równanie postaci $y = 5x + 3b_1 - 2b$ lub $y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}b_1 + \frac{2}{5}b$, gdzie $b, b_1 \in \mathbb{R}$.

Współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_2 jest równy 5 lub $\left(-\frac{1}{5}\right)$.

Zadanie 18. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Uczeń: VII.R6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \le 1$.

Zasady oceniania

5 pkt – rozwiązanie dwóch równań $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$:

$-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$

ORAZ

rozwiązanie jednego z tych równań w przedziale $[-\pi, \pi]$ i uzasadnienie, że dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ równanie nie ma rozwiązania.

4 pkt – rozwiązanie dwóch równań $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$:

$-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$

ALBO

rozwiązanie jednego z tych równań w przedziale $[-\pi, \pi]$ i uzasadnienie, że dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ równanie nie ma rozwiązania.

3 pkt – rozwiązanie dwóch z równań elementarnych $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$

ALBO

rozwiązanie jednego z tych równań i uzasadnienie, że dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ równanie nie ma rozwiązania.

2 pkt – rozwiązanie równania ze zmienną pomocniczą: $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $t = -\sqrt{3}$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

ALBO

uzasadnienie, że dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ równanie nie ma rozwiązania.

1 pkt –zapisanie równania w postaci: $-\operatorname{tg}^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg} x - 1 = 0$, dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Rozważamy dwa przypadki:
***Przypadek 1*: dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$**
***Przypadek 2:* dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$**

Przypadek 1.
Jeśli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, wówczas $\cos x \neq 0$, więc możemy obie strony równania podzielić przez $\cos^2 x$, otrzymując

$$1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

Zauważmy, że $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, zatem

$$-\operatorname{tg}^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

Podstawiamy $\operatorname{tg} x = t$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$-t^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \mathrm{t} - 1 = 0$$

Rozwiązaniami tego równania są: $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $t = -\sqrt{3}$, zatem

$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Wszystkimi rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze liczb rzeczywistych są liczby postaci: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$, a w przedziale $[-\pi, \pi]$ są to liczby: $-\frac{5}{6}\pi$ oraz $\frac{\pi}{6}$
Wszystkimi rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ w zbiorze liczb rzeczywistych są liczby postaci: $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$, a w przedziale $[-\pi, \pi]$ są to liczby: $-\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{2}{3}\pi$.

Przypadek 2.
Dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ równanie $\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$ nie ma rozwiązania, ponieważ cosinus każdej liczby postaci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, przyjmuje wartość zero, a sinus jest równy 1 lub (-1).
Wtedy dla parzystych wartości k otrzymujemy

$$\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = 0^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot 0 - 1^2 \neq 0$$

a dla k nieparzystych

$$\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = 0^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (-1) \cdot 0 - (-1)^2 \neq 0$$

Zatem, że w przypadku 2. nie otrzymamy żadnych rozwiązań.

Zadanie 19. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Uczeń: VII.R5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie odległości x podnóża wieży od punktu A: $x = h\sqrt{\frac{h+l}{l-h}}$.

2 pkt – zastosowanie wzoru na tangens kąta podwojonego i zapisanie zależności między odcinkami x, h, l:

$$\frac{h+l}{x} = \frac{2 \cdot \frac{h}{x}}{1 - \left(\frac{h}{x}\right)^2}$$

1 pkt – zapisanie równań: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{h+l}{x}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystając z definicji tangensa kąta ostrego, zapisujemy zależność

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x}$$

Przyjmując, że kąt, pod jakim widać koniec anteny, ma miarę 2α, możemy zapisać

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{h+l}{x}$$

Korzystając z własności tangensa kąta podwojonego $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, otrzymujemy zależność:

$$\frac{h+l}{x} = \frac{2 \cdot \frac{h}{x}}{1 - \left(\frac{h}{x}\right)^2}$$

Przekształcając kolejno równanie, mamy:

$$\frac{h+l}{x} = \frac{\frac{2h}{x}}{\frac{x^2-h^2}{x^2}}$$

$$\frac{h+l}{x} = \frac{2h}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2-h^2}$$

$$\frac{h+l}{x} = \frac{2hx}{x^2-h^2}$$

$$(x^2 - h^2)(h + l) = 2hx^2$$

$$x^2(l - h) = h^2(h + l)$$

$$x^2 = \frac{h^2(h + l)}{l - h}$$

$$x = \sqrt{\frac{h^2(h + l)}{l - h}}$$

Odległość punktu O od podnóża wieży jest równa $x = h\sqrt{\frac{h+l}{l-h}}$.

Zadanie 20. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 4. Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.	Uczeń: VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów […]; VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych; VIII.7) stosuje twierdzenia: […] o kącie między styczną a cięciwą; VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur. VIII.R) […] stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg […]. VII.5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$. VII.R4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych. VII.R5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Zasady oceniania

6 pkt – prawidłowa metoda obliczenia pola czworokąta $ABCD$ oraz zapisanie wyniku:

$$P_{ABCD} = P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD} = 5 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot \left[\sqrt{78 - 25\sqrt{3} - 50\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right] + 32$$

ALBO

$$P_{ABCD} = \frac{11 + 23\sqrt{3} + 10\sqrt{11}}{2}$$

5 pkt – obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych: $\sin\sphericalangle ADB = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{16}$,

$\cos\sphericalangle ADB = \frac{\sqrt{156-50\sqrt{3}}}{16}$, $\cos\sphericalangle BAD = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

4 pkt – wyznaczenie zależności $\sin\sphericalangle ABD = \sin\sphericalangle BAD\cos\sphericalangle ADB + \cos\sphericalangle BAD\sin\sphericalangle ADB$.

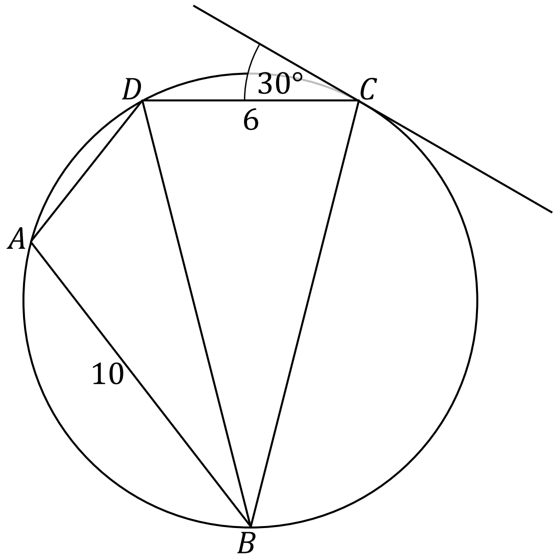
3 pkt – obliczenie wartości $\sin\sphericalangle BAD$: $\sin\sphericalangle BAD = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2 pkt – obliczenie długości przekątnej BD: $|BD| = 8\sqrt{2}$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia o kącie między styczną, a cięciwą i wyznaczenie miary kąta: $|\sphericalangle CBD| = 30^\circ$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie



Z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą wiemy, że $|\sphericalangle CBD| = 30^\circ$.

Pozwala to na wyznaczenie długości boku BC, gdzie uwzględniamy, że $|BC| = |BD|$:

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BDC| = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy zależność:

$$|CD|^2 = |BD|^2 + |BC|^2 - 2|BD|\cdot|BC|\cos\sphericalangle CBD =$$

$$= 2|BC|^2 - 2|BC|^2\cos 30^\circ = 2|BC|^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = |BC|^2\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Zatem

$$|BC|^2 = \frac{|CD|^2}{2-\sqrt{3}} = \frac{6^2}{2-\sqrt{3}} = \frac{36}{2-\sqrt{3}} = \frac{36\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{9\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)}{4-3} = 9\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)$$

$$|BC|^2 = 9\cdot\left(6+2+4\sqrt{3}\right) = 9\cdot\left[\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2\right] = \left[3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right]^2$$

$$|BC| = 3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

Z własności czworokąta wpisanego w okrąg wiemy, że

$$|\measuredangle BAD| = 180^\circ - |\measuredangle BCD|$$

Stąd

$$\sin\measuredangle BAD = \sin(180^\circ - |\measuredangle BCD|) = \sin\measuredangle BCD$$

Zatem:

$$\sin\measuredangle BAD = \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD. W celu obliczenia pól tych trójkątów stosujemy wzór

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

gdzie a, b są długościami dwóch boków trójkąta oraz γ jest kątem między tymi bokami. Mamy więc

$$P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BD|\cdot\ \sin\measuredangle ABD$$

$$P_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|BD|\cdot\ \sin\measuredangle CBD$$

Z twierdzenia sinusów otrzymujemy:

$$\frac{|BD|}{\sin\measuredangle BAD} = \frac{|AB|}{\sin\measuredangle ADB}$$

$$\sin\measuredangle ADB = \frac{|AB|}{|BD|}\cdot\ \sin\measuredangle BAD = \frac{10}{3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{5}{6}$$

Z jedynki trygonometrycznej wyznaczamy $\cos\measuredangle ADB$ oraz $\cos\measuredangle BAD$.

Uwzględniając, że $\measuredangle ADB$ jest ostry oraz $\measuredangle BAD$ jest rozwarty (bo w trójkącie ABD mamy $|\measuredangle BAD| = 105^\circ$), uzyskujemy:

$$\cos \sphericalangle ADB = \sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{36-25}}{6} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\cos \sphericalangle BAD = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{16-\left(6+2+2\sqrt{12}\right)}}{4} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2+6-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}}{4} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Z sumy kątów wewnętrznych trójkąta wyznaczamy:

$$|\sphericalangle ABD| = 180^{\circ} - (|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ADB|)$$

Zatem

$$\sin \sphericalangle ABD = \sin(\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADB) = \sin \sphericalangle BAD \cos \sphericalangle ADB + \cos \sphericalangle BAD \sin \sphericalangle ADB =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{11}-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot 5}{24}$$

$$P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\cdot |AB|\cdot |BD|\cdot \sin \sphericalangle ABD =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{11}-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot 5}{24} =$$

$$= \frac{15\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{11}-75\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{24} =$$

$$= \frac{15\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{11}-75\cdot(6-2)}{24} = \frac{120\sqrt{11}+60\sqrt{3}-300}{24}$$

$$P_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\cdot |BC|\cdot |BD|\cdot \sin \sphericalangle CBD = \frac{1}{2}\cdot |BD|^2\cdot \sin \sphericalangle CBD =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right]^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{9\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)}{4} = 9\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe:

$$P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD} = \frac{120\sqrt{11}+60\sqrt{3}-300}{24} + 9\cdot\left(2+\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{120\sqrt{11}+60\sqrt{3}-300+216\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{24} = \frac{11+23\sqrt{3}+10\sqrt{11}}{2}$$

Zadanie 21. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: VIII.1) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach; VIII.7) stosuje twierdzenia: […] o dwusiecznej kąta […]; VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne obliczenie długości boków :

$$|CB| = |CD| = 20\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$|AB| = 60\left(2-\sqrt{3}\right)$$

3 pkt – wykonanie prawidłowe trzech czynności spośród wymienionych za 1 pkt.

2 pkt – wykonanie prawidłowe dwóch czynności spośród wymienionych za 1 pkt.

1 pkt – uzasadnienie, że trójkąt BCD jest równoramienny

ALBO

zastosowanie twierdzenia o dwusiecznej i wyznaczenie zależności $|AB| = 3x$,

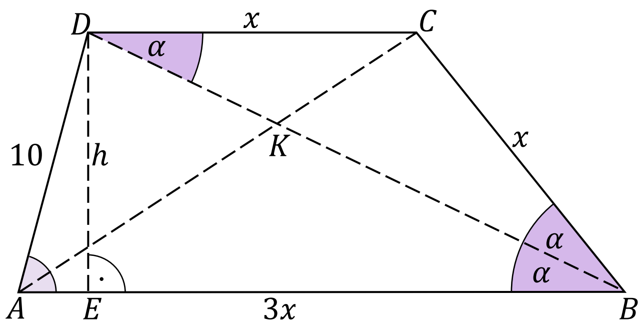
ALBO

obliczenie cosinusa kąta BAD: $\cos\sphericalangle BAD = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy: $|CD| = x$. Ponieważ kąty BDC i DBA są naprzemianległe, więc trójkąt BCD jest równoramienny, a co za tym idzie, $|CB| = |CD| = x$. Wysokość $|DE|$ trapezu oznaczmy h.



Z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że $\frac{|BC|}{|BA|} = \frac{1}{3}$, więc $|BA| = 3x$.

Wiemy, że $\sin\sphericalangle BAD = \frac{|DE|}{|AD|}$, więc

$$\frac{h}{10} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$h = \frac{5}{2}\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

Z warunków zadania mamy podane pole trapezu, stąd

$$\frac{|AB|+|CD|}{2}\cdot h = 100\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{3x+x}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) = 100\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

$$5x\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) = 100\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

$$x = \frac{20\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{20\left(6+2-4\sqrt{3}\right)}{4} = 20\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$3x = 60\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Pozostałe boki trapezu mają długości $|CB| = |CD| = 20\left(2-\sqrt{3}\right)$ oraz $|AB| = 60\left(2-\sqrt{3}\right)$.

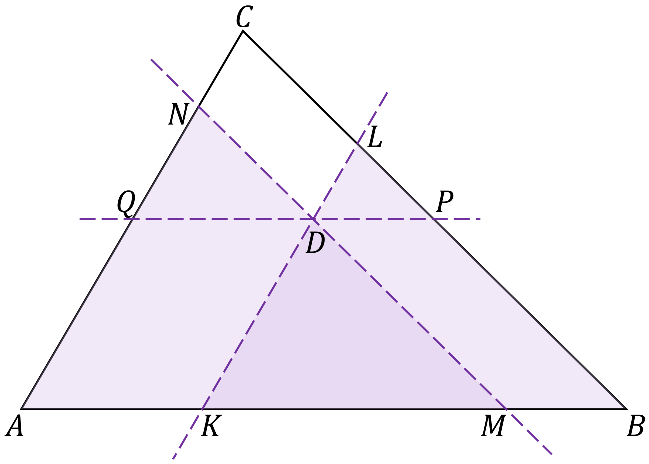
Zadanie 22. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. IV. Rozumowanie i argumentacja. 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Uczeń: VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach; VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa […]; VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; VIII.9) wykorzystuje zależności […] między polami figur podobnych.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie pola trójkąta ABC: $P_{\Delta ABC} = 125$.
5 pkt – obliczenie pól przynajmniej czterech figur.
4 pkt – obliczenie pola: przynajmniej jednego trójkąta i przynajmniej jednego równoległoboku różnego od $DLCN$.
3 pkt – wyznaczenie skali podobieństw trójkątów PDL, MKD, DQN oraz uzależnienie pola (przynajmniej jednego) równoległoboku od pola trójkąta nie zawartego w tym równoległoboku.
2 pkt – spełnienie kryterium zasad oceniania za 1 punkt oraz uzasadnienie podobieństwa trójkątów PDL, MKD, DQN, oraz wyznaczenie skal podobieństw tych trójkątów
ALBO
uzależnienie pola równoległoboku od pola trójkąta, który nie zawiera się w tym równoległoboku, np. wyznaczenie pola równoległoboku $AKDQ$ w zależności od pola trójkąta KDM.
1 pkt – poprowadzenie prostej przechodzącej przez punkt D i równoległej do boku AB.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie



Prowadzimy prostą przechodzącą przez D i równoległą do boku AB. Przetnie ona bok BC w punkcie P oraz przetnie bok AC w punkcie Q.

Pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów KMD, DPL, QDN i równoległoboków $AKDQ$, $MBPD$, $DLCN$.

Na mocy twierdzenia Talesa, trójkąty KMD, DPL i QDN są podobne do trójkąta ABC. Stosunek obwodów figur podobnych w skali k jest równy k. Zatem, na podstawie danych zadania wnioskujemy, że

$$\frac{|KM|}{|KB|} = \frac{5}{7} = \frac{|KD|}{|KL|} = \frac{|DM|}{|LB|}$$

oraz

$$\frac{|KM|}{|AM|}=\frac{5}{8}=\frac{|KD|}{|AN|}=\frac{|DM|}{|NM|}$$

Dzieląc te równości stronami, otrzymujemy

$$\frac{|AM|}{|KB|}=\frac{8}{7}=\frac{|AN|}{|KL|}=\frac{|NM|}{|LB|}$$

Stąd otrzymujemy, np.

$$\frac{8}{5}=\frac{|AM|}{|KM|}=\frac{|AK|+|KM|}{|KM|}=\frac{|AK|}{|KM|}+1$$

$$\frac{|AK|}{|KM|}=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$$

Analogicznie obliczamy pozostałe stosunki boków. Wnioskujemy stąd, że skale podobieństw trójkątów KMD, DPL i QDN do trójkąta ABC są równe odpowiednio:

$$\frac{5}{10}=\frac{1}{2};\ \frac{2}{10}=\frac{1}{5}\ \text{ oraz }\ \frac{3}{10}$$

Skale podobieństwa trójkątów KMD, DPL i QDN są w stosunku $5:2:3$.

W szczególności

$$\frac{|DM|}{|LP|}=\frac{5}{2}$$

Oczywiście $|DM|=|BP|$, więc

$$\frac{|BP|}{|LP|}=\frac{5}{2}$$

Na mocy twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{|BK|}{|AK|}=\frac{|BL|}{|CL|}$$

więc $|BP|:|PL|:|LC|=5:2:3$.

Analogicznie pokazujemy: $|AQ|:|QN|:|NC|=5:3:2$.

Przekątna CD równoległoboku $DLCN$ dzieli ten równoległobok na trójkąty przystające DLC oraz CND. Zatem

$$P_{\Delta DLC}=\frac{1}{2}\cdot P_{DLCN}=\frac{15}{2}$$

Trójkąty CDL i PDL mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka D, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości podstaw

$$\frac{P_{\Delta DLC}}{P_{\Delta PDL}}=\frac{|CL|}{|PL|}=\frac{3}{2}$$

Stąd otrzymujemy:

$$P_{\Delta PDL} = \frac{2}{3} P_{\Delta DLC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{2} = 5$$

Z podobieństwa trójkąta MKD do trójkąta PDL w skali $5 : 2$, otrzymujemy

$$P_{\Delta MKD} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot P_{\Delta PDL} = \frac{25}{4} \cdot 5 = \frac{125}{4}$$

Z podobieństwa trójkąta DQN do trójkąta PDL w skali $3 : 2$, otrzymujemy

$$P_{\Delta DQN} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot P_{\Delta PDL} = \frac{9}{4} \cdot 5 = \frac{45}{4}$$

Obliczamy brakujące pola dwóch równoległoboków:

$$\frac{P_{\Delta AKD}}{P_{\Delta MKD}} = \frac{|AK|}{|MK|} = \frac{3}{5}$$

$$P_{AKDQ} = 2P_{\Delta AKD} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot P_{\Delta MKD} = \frac{6}{5} \cdot \frac{125}{4} = \frac{75}{2}$$

$$\frac{P_{\Delta BMD}}{P_{\Delta KMD}} = \frac{|BM|}{|MK|} = \frac{2}{5}$$

$$P_{MBPD} = 2P_{\Delta BMD} = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot P_{\Delta KMD} = \frac{4}{5} \cdot \frac{125}{4} = 25$$

Sumujemy pola:

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta PDL} + P_{\Delta MKD} + P_{\Delta DQN} + P_{DLCN} + P_{AKDQ} + P_{MBPD} =$$

$$= 5 + \frac{125}{4} + \frac{45}{4} + 15 + \frac{75}{2} + 25 = 125$$

Zadanie 23. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Uczeń: XIII.R2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego.

Zasady oceniania

3 pkt – stwierdzenie, że funkcja f ma własność Darboux i przyjmuje wszystkie wartości pośrednie z przedziału $\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{27}\right]$, w szczególności wartość 0 dla pewnego $x_0 \in [0, 3)$ oraz zauważenie, że $f(0) = -\frac{1}{3}$ i stwierdzenie, że miejsce zerowe jest liczbą dodatnią z przedziału $(0, 3)$.

2 pkt – zapisanie wniosku $f(0) \cdot f(2) < 0$ lub równoważnego
ORAZ
uzasadnienie, że funkcja f jest ciągła w przedziale $[0, 3)$.

1 pkt – zbadanie znaku funkcji f w przedziale np. $[0, 2]$, tzn. obliczenie np.:
$f(0) = -\frac{1}{3}$ i $f(2) = \frac{5}{27}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ chcemy wykazać, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $(0,3)$, wybieramy dwie liczby ograniczające nasz obszar poszukiwań. Dla łatwości obliczeń niech to będą liczby 0 oraz 2. Obliczymy wartości funkcji f na krańcach przedziału $[0,2]$:

$$f(0) = \frac{\sqrt{2 \cdot 0}}{5 + 0^2} - 3^{0-1} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$f(2) = \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{5 + 2^2} - 3^{-2-1} = \frac{2}{9} - \frac{1}{27} = \frac{5}{27}$$

Zauważmy, że $f(0) < 0$ i $f(2) > 0$, czyli $f(0) \cdot f(2) < 0$.
Funkcja f jest funkcją ciągłą, jako suma funkcji ciągłych, więc ma własność Darboux.

Zatem dla argumentów z przedziału $[0, 2]$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie z przedziału $\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{27}\right]$. W szczególności przyjmuje wartość 0 dla pewnego co najmniej jednego $x_0 \in (0, 3)$. Ponadto miejsce zerowe funkcji f jest liczbą dodatnią. To należało wykazać.

Zadanie 24. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: XIII.R3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej; XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

Zasady oceniania

3 pkt – zapisanie równania stycznej: $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

2 pkt – obliczenie $f'(2)$: $f'(2) = \frac{2}{3}$

ALBO

wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{1+4x}}$ oraz obliczenie rzędnej punktu o odciętej $x_0 = 2$: $f(2) = 3$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{1+4x}}$

ALBO

obliczenie rzędnej punktu o odciętej $x_0 = 2$: $f(2) = 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy rzedną punktu styczności

$$f(2) = \sqrt{1+8} = 3$$

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{1+4x}} = \frac{2}{\sqrt{1+4x}}$$

i obliczamy wartość pochodnej dla $x_0 = 2$:

$$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{1+4\cdot 2}} = \frac{2}{3}$$

Korzystając ze wzoru $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$, zapisujemy równanie stycznej

$$y = \frac{2}{3}(x-2) + 3$$

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = 2$ ma postać $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Zadanie 25. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Uczeń: XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – podanie zbioru wartości funkcji f: $[-1, 35]$.

3 pkt – obliczenie wartości funkcji $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ oraz $f(1)$.

2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$

ALBO

wyznaczenie pochodnej funkcji: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ oraz obliczenie wartości funkcji na krańcach przedziału: $f\,(-1) = 3$, $f(3) = 35$.

1 pkt –wyznaczenie pochodnej funkcji: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$

ALBO

obliczenie wartości funkcji na końcach przedziału: $f\,(-1) = 3$, $f(3) = 35$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy wartości funkcji dla $x = -1$ oraz $x = 3$:

$$f(-1) = 1 + 2 + 1 - 1 = 3$$

$$f(3) = 81 - 54 + 9 - 1 = 35$$

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej, doprowadzając jej wzór do postaci iloczynowej:

$$f'(x) = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 4x(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Miejscami zerowymi funkcji pochodnej są:

$$x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = 1$$

Obliczamy wartości funkcji w punktach $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ i porównujemy z $f(-1)$ i $f(3)$:

$$f(0) = -1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{16}$$

$$f(1) = -1$$

Zatem najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $[-1, 3]$ jest (-1), a największą 35. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-1, 35]$.

Zadanie 26. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

Zasady oceniania

3 pkt – zapisanie pola trójkąta jako funkcji jednej zmiennej x: $P(x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$
ORAZ
wyznaczenie dziedziny funkcji P: $(0, R)$.

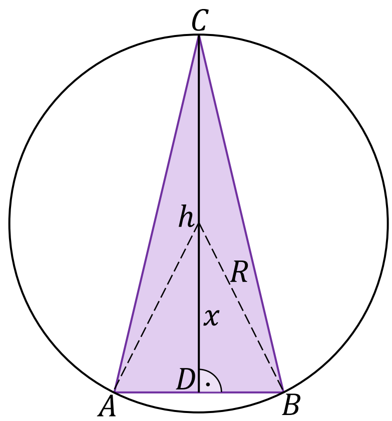
2 pkt – zapisanie pola trójkąta jako funkcji jednej zmiennej x: $P(x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$
ALBO
wyznaczenie i zapisanie długości podstawy $a = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ oraz wysokości $h = R + x$ i wyznaczenie dziedziny funkcji P: $(0, R)$.

1 pkt – wyznaczenie i zapisanie długości podstawy $a = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ oraz wysokości $h = R + x$
ALBO
wyznaczenie dziedziny funkcji P: $(0, R)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy wierzchołki trójkąta przez A, B, C w taki sposób, że $|AC| = |BC|$, punkt D niech zaś będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, wysokość CD przechodzi przez środek opisanego na nim okręgu i dzieli podstawę AB na połowy. Stosując twierdzenie Pitagorasa, wyznaczamy długość podstawy AB w zależności od zmiennej x:



$$|AD|^2 + x^2 = R^2$$

$$|AD| = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$a = 2|AD| = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

Ponadto

$$h = |CD| = R + x$$

Zatem funkcja P pola trójkąta jest określona wzorem

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot (R + x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P:

$$R^2 - x^2 > 0 \ \text{ i } \ x > 0$$

Stąd dziedziną funkcji P jest zbiór $(0, R)$.

Zadanie 27. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Uczeń: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie największej wartości pola trójkąta: $P\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{2}{9}R^2$.

5 pkt – zbadanie przebiegu zmienności funkcji i wyznaczenie argumentu x_0, dla którego funkcja pola osiąga wartość największą: $x_0 = \frac{2}{3}R$.

4 pkt – obliczenie miejsca zerowego funkcji pochodnej: $x = \frac{2}{3}R$.

3 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji pola: $P'(x) = 3x - \frac{9}{2R}x^2$.

2 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji P: $D_P = \left(\frac{1}{2}R,\ \frac{3}{4}R\right)$.

1 pkt – wyznaczenie funkcji pola w zależności od długości jednego boku: $P(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2R}x^3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez x długość jednego z boków trójkąta. Wówczas pozostałe boki mają długość $2x$ oraz $3R - 3x$.

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{abc}{4R}$, otrzymujemy

$$P(x) = \frac{x \cdot 2x \cdot (3R - 3x)}{4R}$$

a po uporządkowaniu

$$P(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2R}x^3$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji. Z nierówności trójkąta mamy:

$$x < 2x + (3R - 3x) \qquad 2x < x + (3R - 3x) \qquad 3R - 3x < x + 2x$$

$$x < \frac{3}{2}R \qquad x < \frac{3}{4}R \qquad x > \frac{1}{2}R$$

Dziedziną funkcji P jest zbiór $\left(\frac{1}{2}R, \frac{3}{4}R\right)$.

Szukamy maksimum funkcji P. W tym celu wyznaczamy pochodną:

$$P'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x - \frac{3}{2R} \cdot 3x^2 = 3x - \frac{9}{2R}x^2$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$P'(x) = 0$$

$$3x - \frac{9}{2R}x^2 = 0$$

$$x = 0 \notin \left(\frac{1}{2}R, \frac{3}{4}R\right) \quad \text{lub} \quad x = \frac{2}{3}R \in \left(\frac{1}{2}R, \frac{3}{4}R\right)$$

Badamy znak funkcji pochodnej:

$$3x - \frac{9}{2R}x^2 > 0$$

$$3x\left(1 - \frac{3}{2R}x\right) > 0$$

Pochodna funkcji P jest dodatnia w przedziale $\left(\frac{1}{2}R, \frac{2}{3}R\right)$, czyli funkcja P jest rosnąca w przedziale $\left(\frac{1}{2}R, \frac{2}{3}R\right]$. Pochodna funkcji P jest ujemna w przedziale $\left(\frac{2}{3}R, \frac{3}{4}R\right)$, czyli funkcja P jest malejąca w przedziale $\left[\frac{2}{3}R, \frac{3}{4}R\right)$. To oznacza, że w punkcie $x_0 = \frac{2}{3}R$ funkcja osiąga wartość największą.

Obliczamy wartość funkcji P dla $x_0 = \frac{2}{3}R$:

$$P\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}R\right)^2 - \frac{3}{2R} \cdot \left(\frac{2}{3}R\right)^3 = \frac{2}{3}R^2 - \frac{4}{9}R^2 = \frac{2}{9}R^2$$

Zadanie 28. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie największej wartości funkcji v: $v(2) = 560$.

5 pkt – wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja v osiąga wartość największą $x = 2$ wraz z uzasadnieniem, np.: maksymalnym przedziałem, na którym funkcja v rośnie, jest $(0, 2]$; maksymalny przedział, na którym funkcja maleje, to $[2, 5)$.

4 pkt – obliczenie miejsca zerowego funkcji pochodnej v': $x = 2$.

3 pkt – obliczenie pochodnej funkcji v: $v'(x) = 4(3x^2 - 26x + 40)$.

2 pkt – zapisanie wzoru funkcji objętości: $v(x) = (10 - 2x) \cdot (16 - 2x) \cdot x$
ORAZ
określenie dziedziny funkcji objętości: $x \in (0, 5)$.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji objętości: $v(x) = (10 - 2x) \cdot (16 - 2x) \cdot x$
ALBO
określenie dziedziny funkcji objętości: $x \in (0, 5)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Za ustalenie niewłaściwej dziedziny funkcji lub jej pominięcie uczeń może uzyskać maksymalnie 3 punkty (za ustalenie wzoru funkcji v, za obliczenie funkcji pochodnej v' oraz za obliczenie największej wartości funkcji $v(2) = 560$).

Przykładowe pełne rozwiązanie
Złożone pudełko będzie miało kształt prostopadłościanu o wymiarach $(10 - 2x) \times (16 - 2x) \times x$, zatem jego objętość v możemy opisać funkcją

$$v(x) = (10 - 2x) \cdot (16 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x \ = \ 4(x^3 - 13x^2 + 40x)$$

Z warunków zadania wynika, że dziedziną tej funkcji jest zbiór $(0, 5)$.

Wyznaczamy pochodną funkcji $v(x)$:

$$v'(x) = 4(3x^2 - 26x + 40)$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$v'(x) = 0$$

$$4(3x^2 - 26x + 40) = 0$$

$$4(x - 2)(3x - 20) = 0$$

$$x = 2 \in (0, 5) \ \text{ lub } \ x = \frac{20}{3} \notin (0, 5)$$

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Badamy znak funkcji pochodnej:

$$v'(x) > 0$$

$$4(3x^2 - 26x + 40) > 0$$

$$4(x-2)(3x-20) > 0$$

Funkcja pochodna przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (0, 2)$ oraz wartości ujemne dla $x \in (2, 5)$.

Wynika stąd, że maksymalnym przedziałem, na którym funkcja $v(x)$ rośnie, jest $(0, 2]$, zaś maksymalny przedział, na którym maleje, to $[2, 5)$.

Wnioskujemy zatem, że funkcja v osiąga wartość największą dla $x = 2$.

Obliczamy największą objętość pudełka:

$$v(2) = 4(2^3 - 13 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2) = 4(8 + 52 + 80) = 4 \cdot 140 = 560$$

Największą objętość – równą 560 cm^3 – otrzymamy, odcinając z rogów prostokąta kwadraty o boku 2 cm.

Zadanie 29. (0–6)

Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie najkrótszego czasu potrzebnego na dotarcie do domu: 3 godziny i 44 minuty.

5 pkt – wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja t osiąga wartość najmniejszą wraz z uzasadnieniem.

4 pkt – obliczenie miejsc zerowych funkcji t'.

3 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji t.

2 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji t.

1 pkt – zapisanie funkcji czasu $t(x)$: $t(x) = \frac{12-x}{5} + \frac{\sqrt{x^2+25}}{3}$ (dla sposobu I) albo $t(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(12-x)^2+25}}{3}$ (dla sposobu II).

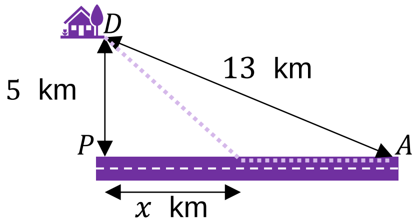
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech P będzie punktem drogi leżącym najbliżej domu D. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa i obliczamy odległość AP: $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ (km).

Przyjmijmy, że Janusz pokonuje drogą odcinek $12 - x$ km, a następnie schodzi z drogi i kieruje się prosto w stronę domu D (zobacz rysunek).



Stosując po raz kolejny twierdzenie Pitagorasa, wyznaczamy długość drogi Janusza poza drogą:

$$s = \sqrt{x^2 + 5^2}$$

Cała trasa Janusza od punktu A do domu D jest równa $12 - x + \sqrt{x^2 + 25}$ kilometrów.

Czas potrzebny na przebycie trasy wzdłuż drogi:

$$t_1 = \frac{12 - x}{5}$$

Czas potrzebny na przebycie trasy poza drogą:

$$t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{3}$$

Czas t wyrażony w godzinach potrzebny na pokonanie całej trasy możemy opisać funkcją

$$t(x) = \frac{12 - x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{3}$$

Dziedziną tej funkcji jest przedział $[0, 12]$.

Wyznaczamy pochodną funkcji t:

$$t'(x) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 25}} \cdot 2x = \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 25}}{15\sqrt{x^2 + 25}}$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$t'(x) = 0$$

$$\frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 25}}{15\sqrt{x^2 + 25}} = 0$$

$$5x - 3\sqrt{x^2 + 25} = 0$$

$$5x = 3\sqrt{x^2 + 25}$$

$$25x^2 = 9(x^2 + 25)$$

$$16x^2 - 225 = 0$$

$$x^2 - \frac{225}{16} = 0$$

$$\left(x - \frac{15}{4}\right)\left(x + \frac{15}{4}\right) = 0$$

Rozwiązaniami powyższego równania są liczby $\left(-\frac{15}{4}\right)$ oraz $\frac{15}{4}$. Do dziedziny funkcji t należy tylko druga z tych liczb.

Badamy znak funkcji pochodnej:

$$t'(x) > 0$$

$$\frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 25}}{15\sqrt{x^2 + 25}} > 0$$

$$5x - 3\sqrt{x^2 + 25} > 0$$

$$5x > 3\sqrt{x^2 + 25}$$

Ponieważ obie strony nierówności są nieujemne, możemy podnieść je do kwadratu:

$$25x^2 > 9(x^2 + 25)$$

$$16x^2 - 225 > 0$$

$$x^2 - \frac{225}{16} > 0$$

$$\left(x - \frac{15}{4}\right)\left(x + \frac{15}{4}\right) > 0$$

Biorąc pod uwagę dziedzinę funkcji t, możemy stwierdzić, że funkcja pochodna przyjmuje wartości ujemne dla $x \in \left[0, \frac{15}{4}\right)$, zaś wartości dodatnie dla $x \in \left(\frac{15}{4}, 12\right]$. Oznacza to, że maksymalnym przedziałem, w którym funkcja t maleje jest $\left[0, \frac{15}{4}\right]$, natomiast maksymalny przedział, w którym funkcja t rośnie, to $\left[\frac{15}{4}, 12\right]$. Wnioskujemy zatem, że dla argumentu $x = \frac{15}{4}$ funkcja t osiąga wartość najmniejszą.

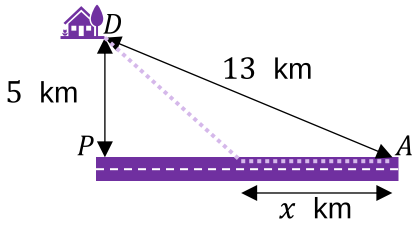
Obliczamy najkrótszy czas dotarcia Janusza z punktu A do domu D.

$$t\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{1}{5}\left(12 - \frac{15}{4}\right) + \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 25} = \frac{1}{5} \cdot \frac{33}{4} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{33}{20} + \frac{25}{12} = \frac{224}{60}$$

Najkrótszy czas, jaki Janusz potrzebuje, by dotrzeć do domu, to $\frac{224}{60}$ godziny, czyli 3 godziny i 44 minuty.

Sposób II

Niech P będzie punktem drogi leżącym najbliżej domu D. Przyjmijmy tym razem, że Janusz po przejściu x km drogą, zaczyna iść w kierunku domu D (zobacz rysunek).



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa (patrz *Sposób I*), możemy określić długość odcinka AP jako 12 km.

Stosując po raz kolejny twierdzenie Pitagorasa, wyznaczamy długość drogi Janusza poza drogą:

$$s=\sqrt{(12-x)^2+5^2}$$

Cała trasa Janusza od punktu A do domu D jest równa $x+\sqrt{(12-x)^2+25}$ kilometrów.

Czas potrzebny na przebycie trasy wzdłuż drogi:

$$t_1=\frac{x}{5}$$

Czas potrzebny na przebycie trasy poza drogą:

$$t_2=\frac{\sqrt{(12-x)^2+25}}{3}$$

Czas t wyrażony w godzinach potrzebny na pokonanie całej trasy możemy opisać funkcją

$$t(x)=\frac{x}{5}+\frac{\sqrt{(12-x)^2+25}}{3}$$

Dziedziną tej funkcji jest przedział $[0,12]$.

Wyznaczamy pochodną funkcji t:

$$t'(x)=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(12-x)^2+25}}\cdot[-2\cdot(12-x)]=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{12-x}{3\sqrt{(x^2-24x+169)}}=\frac{3\sqrt{x^2-24x+169}+5x-60}{3\sqrt{x^2-24x+169}}$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$t'(x) = 0$$

$$\frac{3\sqrt{x^2 - 24x + 169} + 5x - 60}{3\sqrt{x^2 - 24x + 169}} = 0$$

$$3\sqrt{144 - 24x + x^2 + 25} + 5x - 60 = 0$$

$$3\sqrt{x^2 - 24x + 169} = 60 - 5x$$

$$9(x^2 - 24x + 169) = (60 - 5x)^2$$

$$9x^2 - 216x + 1521 = 3600 - 600x + 25x^2$$

$$-16x^2 + 384x - 2079 = 0$$

Wyróżnik tego równania kwadratowego jest równy 107460, a jego pierwiastkami są liczby $\frac{33}{4}$ oraz $\frac{63}{4}$. Do dziedziny funkcji t należy tylko pierwsza z nich.

Badamy znak funkcji pochodnej:

$$t'(x) > 0$$

$$\frac{3\sqrt{x^2 - 24x + 169} + 5x - 60}{3\sqrt{x^2 - 24x + 169}} > 0$$

$$3\sqrt{144 - 24x + x^2 + 25} + 5x - 60 > 0$$

$$3\sqrt{x^2 - 24x + 169} > 60 - 5x$$

Ponieważ obie strony nierówności są liczbami nieujemnymi, możemy zapisać

$$9(x^2 - 24x + 169) > (60 - 5x)^2$$

$$9x^2 - 216x + 1521 > 3600 - 600x + 25x^2$$

$$-16x^2 + 384x - 2079 > 0$$

$$-16\left(x - \frac{33}{4}\right)\left(x - \frac{63}{4}\right) > 0$$

Biorąc pod uwagę dziedzinę funkcji t, możemy stwierdzić, że funkcja pochodna przyjmuje wartości ujemne dla $x \in \left[0, \frac{33}{4}\right)$, zaś wartości dodatnie dla $x \in \left(\frac{33}{4}, 12\right]$. Oznacza to, że maksymalnym przedziałem, w którym funkcja t maleje jest $\left[0, \frac{33}{4}\right]$, natomiast maksymalny przedział, w którym funkcja t rośnie, to $\left[\frac{33}{4}, 12\right]$. Wnioskujemy zatem, że dla argumentu $x = \frac{33}{4}$ funkcja osiąga wartość najmniejszą.

Obliczamy najkrótszy czas dotarcia Janusza z punktu A do domu D.

$$t\left(\frac{33}{4}\right)=\frac{\frac{33}{4}}{5}+\frac{\sqrt{\left(12-\frac{33}{4}\right)^2+25}}{3}=\frac{33}{20}+\frac{\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2+25}}{3}=\frac{33}{20}+\frac{\sqrt{\frac{625}{16}}}{3}=\frac{33}{20}+\frac{25}{12}=\frac{224}{60}$$

Najkrótszy czas, jaki Janusz potrzebuje, by dotrzeć do domu, to $\frac{224}{60}$ godziny, czyli 3 godziny i 44 minuty.

Zadanie 30. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie argumentu, dla którego funkcja K osiąga minimum: $v=70$ km/h wraz z uzasadnieniem.

3 pkt – obliczenie miejsc zerowych funkcji pochodnej.

2 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji K: $K'(v)=-\frac{98S}{v^2}+\frac{S}{50}$.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji kosztu całego przejazdu:

$K(v)=\frac{S}{v}\cdot\left[\left(7+\frac{v^2}{400}\right)\cdot 8+42\right]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ciężarówka ma do przejechania trasę długości S km w czasie $\frac{S}{v}$ godzin.

Zapisujemy funkcję kosztu K przejechania całej trasy:

$$K(v)=\frac{S}{v}\cdot\left[\left(7+\frac{v^2}{400}\right)\cdot 8+42\right]=\frac{S}{v}\cdot\left[98+\frac{v^2}{50}\right]=\frac{98S}{v}+\frac{Sv}{50}$$

Z warunków zadania wynika, że dziedziną tej funkcji jest zbiór $[40,80]$.

Wyznaczamy pochodną funkcji K:

$$K'(v)=-\frac{98S}{v^2}+\frac{S}{50}$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$K'(v)=0$$

$$-\frac{98S}{v^2}+\frac{S}{50}=0$$

$$\frac{S}{50} = \frac{98S}{v^2}$$

$$v^2 = 4900$$

$$v = 70 \quad \text{lub} \quad v = -70$$

Do dziedziny funkcji K należy tylko pierwsza z tych liczb.

Badamy znak funkcji pochodnej:

$$K'(v) > 0$$

$$-\frac{98S}{v^2} + \frac{S}{50} > 0$$

$$\frac{S}{50} > \frac{98S}{v^2}$$

$$v^2 > 4900$$

$$(v-70)(v+70) > 0$$

Biorąc pod uwagę dziedzinę funkcji K, stwierdzamy, że pochodna przyjmuje wartości ujemne dla $v \in [40, 70)$, zaś wartości dodatnie dla $v \in (70, 80]$. Zatem funkcja K maleje w przedziale $[40, 70]$ i rośnie w przedziale $[70, 80]$. Wynika stąd, że funkcja K osiąga wartość najmniejszą, gdy $v = 70$.

Koszt przejazdu jest najmniejszy, gdy ciężarówka będzie jechać z prędkością 70 km/h.

Zadanie 31. (0–6)

Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej. X.6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie największej możliwej objętości stożka: $V\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{32}{81}\pi$.

5 pkt – wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja $V(r)$ osiąga wartość największą $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ wraz z uzasadnieniem, np.: funkcja $V(r)$ rośnie w przedziale $\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ i maleje w przedziale $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3},\ 1\right)$.

4 pkt – obliczenie miejsca zerowego funkcji pochodnej: $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji objętości: $V'(r)=\frac{1}{3}\pi r\cdot\frac{2\sqrt{1-r^2}+2-3r^2}{\sqrt{1-r^2}}$.

2 pkt – zapisanie wzoru na objętość stożka uzależnioną od promienia podstawy:

$$V(r)=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)$$

ORAZ

wyznaczenie dziedziny funkcji objętości: $r\in(0,1)$.

1 pkt – zapisanie wzoru na objętość stożka uzależnioną od promienia podstawy:

$V(r)=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)$.

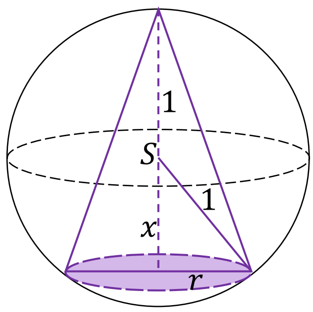
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Za ustalenie niewłaściwej dziedziny funkcji lub jej pominięcie uczeń może uzyskać maksymalnie 3 punkty (za ustalenie wzoru funkcji $V(r)$, za obliczenie funkcji pochodnej $V'(r)$ oraz za obliczenie największej wartości funkcji $V\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{32}{81}\pi$).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech r będzie promieniem podstawy stożka, zaś x odległością środka kuli od spodka wysokości stożka (zobacz rysunek).



Stosując twierdzenie Pitagorasa, wyznaczamy x:

$$x=\sqrt{1-r^2}$$

Objętość stożka możemy zapisać jako

$$V(r)=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $(0,1)$.

Wyznaczamy pochodną funkcji objętości $V(r)$:

$$V'(r)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left[2r\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)+r^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}}\cdot(-2r)\right]$$

$$V'(r)=\frac{1}{3}\cdot\pi r\cdot\left[2+2\sqrt{1-r^2}-\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\right]=\frac{1}{3}\pi r\cdot\frac{2\sqrt{1-r^2}+2-3r^2}{\sqrt{1-r^2}}$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$V'(r) = 0$$

$$\frac{1}{3}\pi r \cdot \frac{2\sqrt{1-r^2}+2-3r^2}{\sqrt{1-r^2}} = 0$$

$$2\sqrt{1-r^2}+2-3r^2 = 0$$

$$2\sqrt{1-r^2} = 3r^2-2$$

Obie strony równania podnosimy do drugiej potęgi:

$$4(1-r^2) = (3r^2-2)^2$$

$$4-4r^2 = 9r^4-12r^2+4$$

$$9r^4-8r^2 = 0$$

$$9r^2\left(r^2-\frac{8}{9}\right) = 0$$

Równanie to posiada trzy pierwiastki: $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ oraz $r_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Tylko ostatni należy do dziedziny funkcji $V(r)$.
Sprawdzamy, czy r_3 jest miejscem zerowym funkcji pochodnej:

$$V'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{2\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}+2-3\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}+2-\frac{8}{3}}{\frac{1}{3}} = 0$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(r) > 0$$

$$\frac{1}{3}\pi r \cdot \frac{2\sqrt{1-r^2}+2-3r^2}{\sqrt{1-r^2}} > 0$$

$$2\sqrt{1-r^2}+2-3r^2 > 0$$

$$2\sqrt{1-r^2} > 3r^2-2$$

Rozważmy dwa przypadki.

Jeśli $r \in \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, prawa strona nierówności jest ujemna i nierówność jest prawdziwa.

Dla $r \in \left[\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right)$ obie strony nierówności są nieujemne i możemy je podnieść do drugiej potęgi:

$$4(1-r^2) > (3r^2-2)^2$$

$$4 - 4r^2 > 9r^4 - 12r^2 + 4$$

$$-9r^4 + 8r^2 > 0$$

$$-9r^2\left(r^2 - \frac{8}{9}\right) > 0$$

$$-9r^2\left(r - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(r + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) > 0$$

Funkcja pochodna przyjmuje wartości dodatnie dla $r \in \left(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, zaś wartości ujemne dla $r \in \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right)$.

Oznacza to, że funkcja $V(r)$ rośnie w przedziale $\left(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ i maleje w przedziale $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right)$.

Wynika z tego, że funkcja $V(r)$ przyjmuje wartość największą dla $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Obliczamy wartość funkcji $V(r)$ dla argumentu $\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$V\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{8}{9} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9}}\right) =$$

$$= \frac{8}{27}\pi\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27}\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{81}\pi$$

Największa możliwa objętość stożka to $\frac{32}{81}\pi$.

Zadanie 32.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: X.6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń. VIII.12) przeprowadza dowody geometryczne.

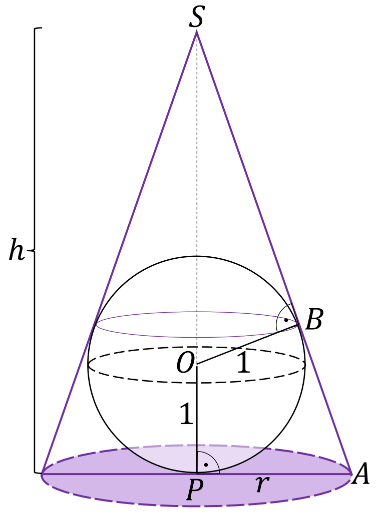
Zasady oceniania

2 pkt – wyznaczenie wzoru funkcji objętości: $V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}$.

1 pkt – wyznaczenie zależności między promieniem podstawy stożka r i jego wysokością h: $r = \sqrt{\frac{h}{h-2}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie



Niech r będzie promieniem podstawy stożka, a h jego wysokością (zobacz rysunek).

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OBS mamy:

$$1^2 + |SB|^2 = (h-1)^2$$

Stąd

$$|SB| = \sqrt{h^2 - 2h}$$

Zauważmy, że trójkąty APS oraz OBS są podobne (posiadają kąt prosty, a kąt przy wierzchołku S jest wspólny). Wynika stąd proporcja:

$$\frac{|SB|}{|SP|} = \frac{|OB|}{|PA|}$$

$$\frac{\sqrt{h^2 - 2h}}{h} = \frac{1}{r}$$

$$\sqrt{\frac{h-2}{h}} = \frac{1}{r}$$

Mamy więc

$$r = \sqrt{\frac{h}{h-2}}$$

Wyznaczamy wzór na objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h}{h-2} \cdot h$$

Możemy zatem przyjąć, że V jest funkcją zmiennej h:

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}$$

Zadanie 32.2. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

5 pkt – obliczenie najmniejszej możliwej objętości stożka: $V = \frac{8}{3}\pi$.

4 pkt – wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja V osiąga wartość najmniejszą $h = 4$ wraz z uzasadnieniem, np.: maksymalnym przedziałem, w którym funkcja V maleje, jest $(2, 4]$; maksymalny przedział, w którym funkcja rośnie, to $[4, +\infty)$.

3 pkt – obliczenie miejsca zerowego funkcji pochodnej V': $h = 4$.

2 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V:

$$V'(h) = \frac{h\pi(h-4)}{3(h-2)^2}$$

1 pkt – określenie dziedziny funkcji $V(h)$: $h \in (2, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Objętość ostrosłupa V jest funkcją zmiennej h:

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $(2, +\infty)$.

Wyznaczamy pochodną funkcji V:

$$V'(h) = \frac{2h\pi \cdot 3(h-2) - h^2\pi \cdot 3}{9(h-2)^2} = \frac{h\pi(h-4)}{3(h-2)^2}$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$\frac{h\pi(h-4)}{3(h-2)^2} = 0$$

Jedynym miejscem zerowym pochodnej funkcji V jest liczba 4.

Badamy znak pochodnej:

$$\frac{h\pi(h-4)}{3(h-2)^2} > 0$$

$$h(h-4) > 0$$

Funkcja pochodna V' przyjmuje wartości ujemne dla $h \in (2, 4)$ oraz wartości dodatnie dla $h \in (4, +\infty)$.

Funkcja V maleje w przedziale $(2, 4]$, zaś rośnie w przedziale $[4, +\infty)$. Oznacza to, że w punkcie $h = 4$ osiąga wartość najmniejszą równą

$$V(4) = \frac{4^2\pi}{3(4-2)} = \frac{16\pi}{6} = \frac{8}{3}\pi$$