CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
MMAP-R0-100-2306

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- [ ] dostosowania zasad oceniania
- [ ] dostosowania w zw. z dyskalkulią.

DATA: **2 czerwca 2023 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **14:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

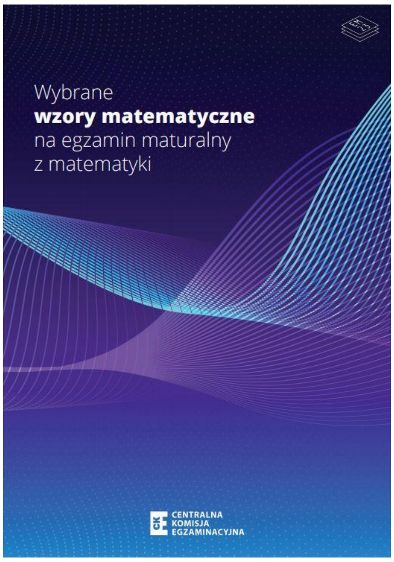
Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Układ graficzny
© CKE 2022

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.

Zadanie 1. (0–2)

Dane są liczby

$$a = 4^{\log_2 45} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{\log_3 2023}{\log_9 2023}$$

Oblicz $a - b$.

Zadanie 2. (0–3)

Wśród n osób są Ania i jej dwaj znajomi. Wszystkie te n osób ustawiamy w kolejkę jedna za drugą. Liczba wszystkich takich ustawień jest 12 razy większa od liczby wszystkich takich ustawień tych n osób w kolejkę, w których Ania i jej dwaj znajomi zajmują trzy kolejne miejsca (w dowolnej kolejności).

Oblicz n. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–3)

Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii sieci ciepłowniczej na pewnym osiedlu mieszkaniowym w godzinach porannych pojedynczego dnia jest równe $0{,}1$.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w okresie siedmiu dni wystąpią co najwyżej dwa takie dni, w których nastąpi awaria tej sieci na tym osiedlu w godzinach porannych. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
Punkt $P = (x_0, 18)$ należy do wykresu funkcji f.

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.
Zapisz obliczenia.

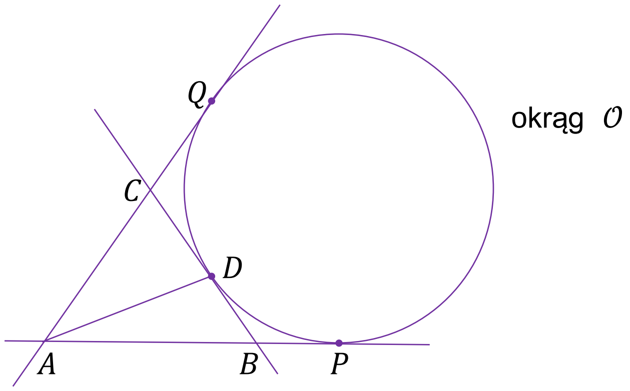
Zadanie 5. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$$

Zadanie 6. (0–3)

Dany jest okrąg $\mathcal{O}$. Przez punkt A poprowadzono dwie proste, które są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – P oraz Q. Przez punkt B leżący na odcinku AP poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie D, która przecięła odcinek AQ w punkcie C (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $|AQ| = 5 \cdot |BP|$ oraz $|CD| = 2 \cdot |BD|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 7. (0–4)

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$2x - \frac{6x}{x-1} + \frac{18x}{(x-1)^2} - \frac{54x}{(x-1)^3} + \ \ldots$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 1), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{15}{2}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

w zbiorze $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–4)

W okrąg o równaniu $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ wpisano trójkąt ABC. Bok AB tego trójkąta jest zawarty w prostej o równaniu $4x-3y+2=0$. Wysokość CD tego trójkąta dzieli bok AB tak, że $|AD|=4\cdot|DB|$.

Oblicz pole trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$$

Zapisz obliczenia.

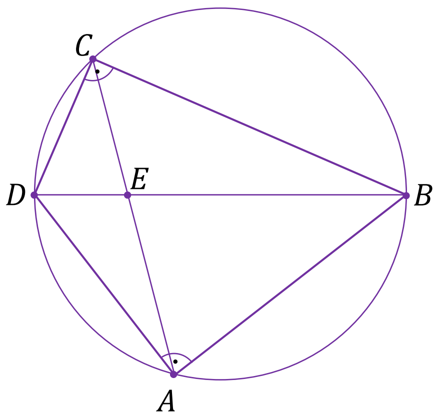
Zadanie 11. (0–5)

Ciąg (a, b, c) jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Ciąg $(2a, 2b, c+1)$ jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym. Ponadto spełniony jest warunek $c - b = 6$.

Oblicz a, b oraz c. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–5)

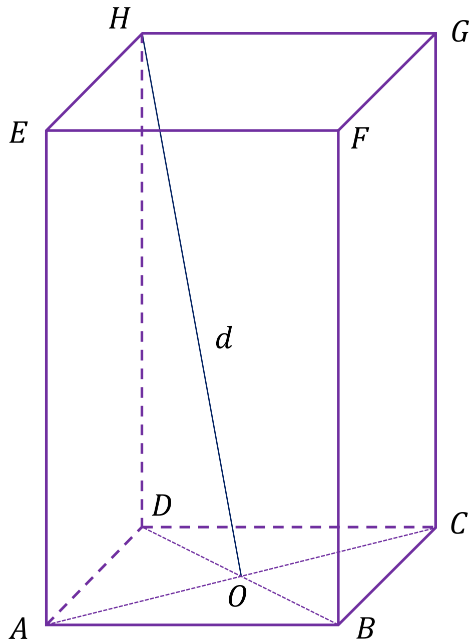
Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Kąty BAD i BCD są proste (zobacz rysunek). Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie E tak, że $|BE| = 3 \cdot |DE|$ oraz $|BD| = 2 \cdot |AE|$.



Oblicz długości boków czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0–6)

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne $ABCDEFGH$, w których odcinek łączący punkt O przecięcia przekątnych AC i BD podstawy $ABCD$ z dowolnym wierzchołkiem podstawy $EFGH$ ma długość d (zobacz rysunek).



a) Wyznacz zależność objętości V graniastosłupa od jego wysokości h i podaj dziedzinę funkcji $V(h)$.

b) Wyznacz wysokość tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa.

Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023