CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
MMAP-R0-100-2405

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY
Uprawnienia zdającego do:
☐ dostosowania zasad oceniania.

DATA: **15 maja 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

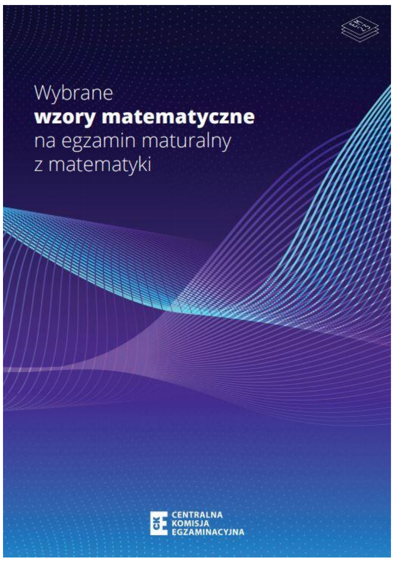
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 27 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej ($t = 0$) filiżanka z gorącą kawą znajduje się w pokoju, a temperatura tej kawy jest równa $80\ {}^\circ\mathrm{C}$. Temperatura w pokoju (temperatura otoczenia) jest stała i równa $20\ {}^\circ\mathrm{C}$. Temperatura T tej kawy zmienia się w czasie zgodnie z zależnością

$$T(t) = \left(T_p - T_z\right) \cdot k^{-t} + T_z \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

T – temperatura kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,
t – czas wyrażony w minutach, liczony od chwili początkowej,
T_p – temperatura początkowa kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,
T_z – temperatura otoczenia wyrażona w stopniach Celsjusza,
k – stała charakterystyczna dla danej cieczy.

Po 10 minutach, licząc od chwili początkowej, kawa ostygła do temperatury $65\ {}^\circ\mathrm{C}$.

Oblicz temperaturę tej kawy po następnych pięciu minutach. Wynik podaj w stopniach Celsjusza, w zaokrągleniu do jedności. Zapisz obliczenia.

1.
0–1–2

2.
0–1–2

Zadanie 2. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3 - 8}{(x-2)^2}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–3)

W pewnym zakładzie mleczarskim śmietana produkowana jest w 200-gramowych opakowaniach. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym opakowaniu śmietana zawiera mniej niż 36% tłuszczu, jest równe $0{,}01$. Kontroli poddajemy 10 losowo wybranych opakowań ze śmietaną.

3.
0–1–2–3

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród opakowań poddanych tej kontroli będzie co najwyżej jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt P, o pierwszej współrzędnej równej 2, należy do wykresu funkcji f.
Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P.

Oblicz współczynniki a oraz b w równaniu tej stycznej. Zapisz obliczenia.

4.
0–1–2–3

5.
0–1–
2–3

Zadanie 5. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$, to $\log_{12} 80 = \dfrac{2a+1}{a \cdot (1+b)}$.

Zadanie 6. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakakolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

6.
0–1–2–3

Zadanie 7. (0–4)

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Liczby x, y oraz z są – odpowiednio – pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

7.
0–1–2–3–4

Oblicz x, y oraz z. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

Dany jest trójkąt ABC, który nie jest równoramienny. W tym trójkącie miara kąta ABC jest dwa razy większa od miary kąta BAC.

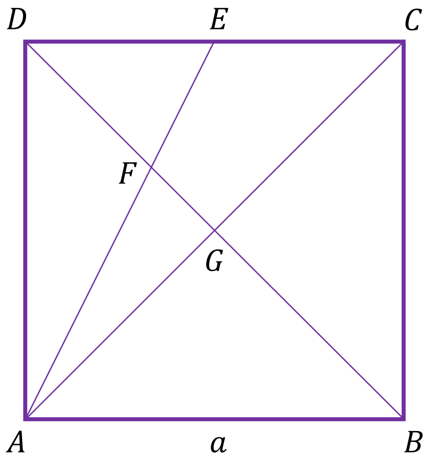
8.
0–1–2–3–4

Wykaż, że długości boków tego trójkąta spełniają warunek

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

Zadanie 9. (0–4)

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości a. Punkt E jest środkiem boku CD. Przekątna BD dzieli trójkąt ACE na dwie figury: AGF oraz $CEFG$ (zobacz rysunek).



Oblicz pola figur AGF oraz $CEFG$. Zapisz obliczenia.

9.
0–1–2–3–4

10.
0–1–2–3–4–5

Zadanie 10. (0–5)

Rozwiąż równanie

$$\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$$

w zbiorze $[0, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) środek S okręgu o promieniu $\sqrt{5}$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Przez punkt $A = (1, 2)$, którego odległość od punktu S jest większa od $\sqrt{5}$, poprowadzono dwie proste styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – B i C. Pole czworokąta $ABSC$ jest równe 15.

11.
0–1–2–3–4–5

Oblicz współrzędne punktu S. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

12.
0–1–2–3–4–5–6

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - (3m + 1) \cdot x + 2m^2 + m + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 , x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 3456, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż $8\sqrt{3}$.

Zadanie 13.1. (0–2)

13.1.
0–1–2

Wykaż, że pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in \left(0, 8\sqrt{3}\,\right]$.

13.2.
0–1–2–3–4

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023