

Wymagania maturalne w toku 4/5 letniego liceum/technikum

Porównanie "Wymagań określonych w podstawie programowej kształcenia ogólnego", czyli normalnych wymagań z "wymaganiami egzaminacyjnymi", czyli z ograniczeniami pandemicznymi. Dla osób kształconych w toku **bez gimnazjów**. Na podstawie porównania tekstów z dnia 10.06.2022:
https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/podstawa_programowa/matematyka.pdf
<https://www.gov.pl/attachment/a8d94974-3724-44cf-9817-2e6a19dce14d>

1 Wymagania CKE z ograniczeniami 2023 i 2024 - podstawowy

Na szaro zaznaczyłem te zagadnienia, które normalnie by obowiązywały do matury **podstawowej** od roku 2023, ale w 2023 i 2024 zostały usunięte ze względów pandemicznych. Na **czzerwono** tekst, który został "dolożony".

1. Liczby rzeczywiste. Uczeń:

- (a) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
- (b) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:
 - i. dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych
 - ii. dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2
- (c) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych
- (d) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach
- (e) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
- (f) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej
- (g) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$;
- (h) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów **z kapitalizacją roczną i zysków z lokat**
- (i) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi

2. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:

- (a) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$, $a^n - b^n$
- (b) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- (c) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;
- (d) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$
- (e) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- (f) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;
- (g) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

(h) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}, \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$$

3. Równania i nierówności. Uczeń:

- (a) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
- (b) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
- (c) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- (d) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
- (e) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
- (f) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
- (g) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

4. Układy równań. Uczeń:

- (a) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
- (b) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
- (c) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci

$$\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$$

5. Funkcje. Uczeń:

- (a) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- (b) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- (c) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- (d) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- (e) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- (f) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
- (g) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
- (h) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
- (i) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie
- (j) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;

- (k) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
- (l) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- (m) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
- (n) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

6. Ciągi. Uczeń:

- (a) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- (b) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:

$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n(1 - a_n) \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

- (c) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- (d) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- (e) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- (f) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- (g) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

7. Trygonometria. Uczeń:

- (a) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;
- (b) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
- (c) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
- (d) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;
- (e) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$;
- (f) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty **m.in. z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów**).

8. Planimetria. Uczeń:

- (a) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- (b) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok
- (c) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
- (d) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
- (e) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;

- (f) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
- (g) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
- (h) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
- (i) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
- (j) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
- (k) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
- (l) przeprowadza dowody geometryczne.

9. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:

- (a) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
- (b) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
- (c) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
- (d) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;
- (e) oblicza odległość punktu od prostej;
- (f) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
- (g) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

10. Stereometria. Uczeń:

- (a) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- (b) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwusiecznego między półpłaszczyznami;
- (c) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
- (d) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- (e) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
- (f) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
- (g) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych. **graniastosłupów oraz ostrosłupów podobnych**

11. Kombinatoryka. Uczeń:

- (a) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
- (b) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:

- i. obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
- ii. obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

12. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Uczeń:

- (a) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
- (b) stosuje skalę centylową;
- (c) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;
- (d) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
- (e) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

13. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Uczeń:

- (a) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

2 Wymagania CKE z ograniczeniami 2023 i 2024 - rozszerzony

Na szaro zaznaczyłem te zagadnienia, które normalnie by obowiązywały do matury **podstawowej** od roku 2023, ale w 2023 i 2024 zostały usunięte ze względów pandemicznych. Na **czzerwono** tekst, który został "dolożony".

1. Liczby rzeczywiste. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- (a) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu
- (b) **przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.**

2. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- (a) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- (b) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona):

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- (c) **dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;**
- (d) korzysta ze wzorów na: $(a + b)^3, (a - b)^3, a^3 - b^3, a^3 + b^3, (a + b)^n$ i $(a - b)^n$.

3. Równania i nierówności. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- (a) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0, W(x) \geq 0, W(x) < 0, W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
- (b) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

- (c) stosuje wzory Viete'a dla równań kwadratowych;
- (d) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2|x+3| + 3|x-1| = 13, |x+2| + 2|x-3| < 11$;
- (e) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

4. Układy równań. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- (a) **rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci**

$$\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$$

(b) rozwiązuje układy równań kwadratowych postaci

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = c \\ x^2 + y^2 + dx + ey = f \end{cases}$$

5. Funkcje. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- (a) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;
- (b) posługuje się złożeniami funkcji;
- (c) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

6. Ciągi. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- (a) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;
- (b) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

7. Trygonometria. Uczeń:

- (a) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
- (b) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
- (c) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
- (d) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;
- (e) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;
- (f) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.
- (g) **stosuje twierdzenie sinusów;**
- (h) **oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (m.in. z wykorzystaniem twierdzenia sinusów).**

8. Planimetria. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- (a) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu;
- (b) **stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa;**
- (c) **przeprowadza dowody geometryczne.**

9. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- (a) **posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);**
- (b) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;
- (c) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;
- (d) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.
- (e) **znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;**

10. Stereometria. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- (a) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;
 - (b) posługuje się pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
 - (c) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
 - (d) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
 - (e) wyznacza przekroje sześciianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii
11. Kombinatoryka. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
- (a) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;
 - (b) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.
12. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
- (a) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;
 - (b) stosuje schemat Bernoulliego.
13. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
- (a) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);
 - (b) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;
 - (c) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;
 - (d) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
 - (e) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
 - (f) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.